



INSTITUT
POLYTECHNIQUE
DE PARIS

Cavités diamagnétiques

modèles, simulations et apprentissage automatique

Clément MAZZOCCHI

27/01/2026



Table des matières

1. Cavités diamagnétiques
2. Modèles
3. Base de données de simulations
4. Apprentissage automatique



1. Cavités diamagnétiques

Table des matières

1. Cavités diamagnétiques

Contexte

La MHD idéale

Rayons caractéristiques

2. Modèles

3. Base de données de simulations

4. Apprentissage automatique



Contexte

Contexte

Un phénomène présent dans...

■ Les plasmas astrophysiques :

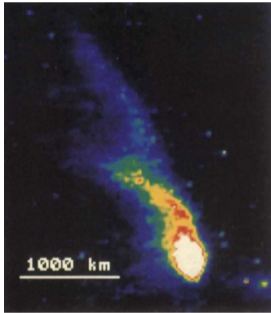


Figure – Comète artificielle générée par l'explosion d'un nuage de baryum dans le vent solaire [Valenzuela et al., 1986]

■ Les plasmas laser :

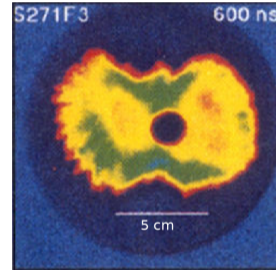


Figure – Expansion d'un plasma généré par laser [Dimonte and Wiley, 1991]

Contexte

Deux populations ioniques

■ Ions débris :

- masse m_d
- charge Z_d
- nombre N_d

■ Ions ambiants :

- masse m_a
- charge Z_a
- densité $n_{a,0}$

■ Champ magnétique ambiant \mathbf{B}_0

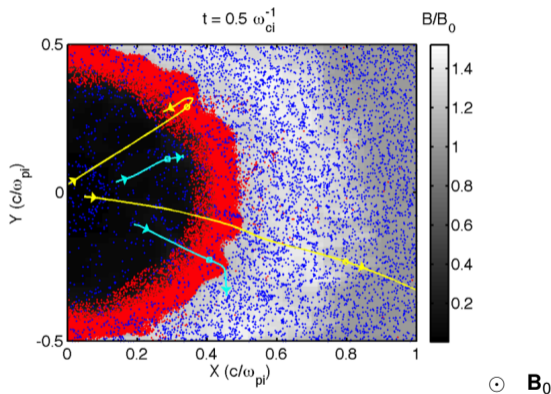


Figure – Champ magnétique et position des ions (débris en rouge, ambiants en bleu) issus d'une simulation hybride [Niemann et al., 2013]

Contexte

Le phénomène

1. Plasma ambiant magnétisé initialement uniforme et au repos
↓
2. Expansion des ions débris à la vitesse radiale initiale v_0
↓
3. Interaction avec le plasma et le champ ambiants
↓
4. Formation d'une cavité diamagnétique
↓
5. Transfert d'énergie vers les ions ambiants et le champ magnétique + formation d'instabilités
↓
6. Implosion de la cavité

Figure – Evolution du champ magnétique dans le plan $z = 0$ en unités de B_0 (simulation MHD Kalypso)

Contexte

3 zones d'intérêt

1. Cavité diamagnétique : $B_z \approx 0$
2. Zone de compression magnétique : $B_z > B_0$
3. Milieu ambiant : $B_z = B_0$

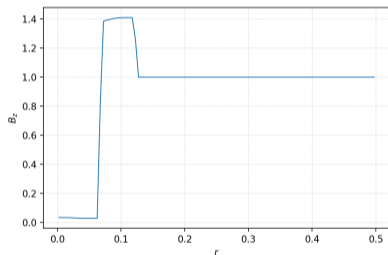


Figure – Moyenne radiale $B_z(r, z = 0; t)$ (simulation MHD Kalypsso)

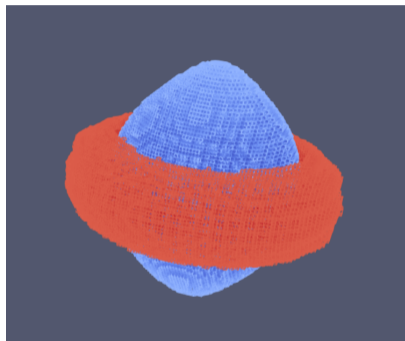


Figure – Champ magnétique en 3D (simulation MHD Kalypsso)



La MHD idéale

La MHD idéale

Théorème d'Alfvén et force de Laplace

Théorème du champ gelé

Soit une surface S se déplaçant avec le fluide MHD. Alors,

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d^2S = 0$$

Conséquence : gel des lignes de champ magnétique dans le plasma en mouvement.

Force de Laplace

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0} = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \underbrace{\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}}{\mu_0}}_{\frac{d}{ds} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{b} + \frac{B^2}{\mu_0 R} \mathbf{n}}$$

La MHD idéale

Conséquences

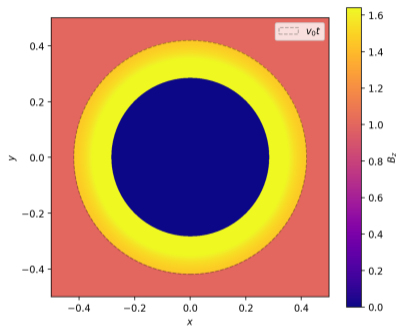


Figure – Champ magnétique dans le plan $z = 0$ en unités de B_0 (modèle hybride)

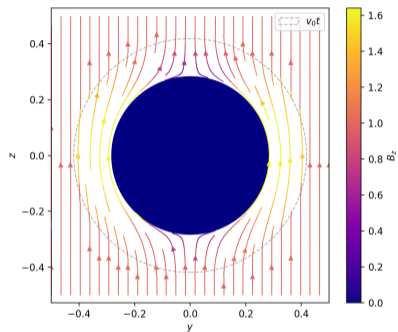


Figure – Lignes de champ dans le plan $x = 0$ en unités de B_0 (modèle hybride)

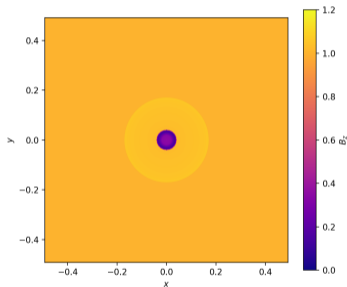


Rayons caractéristiques

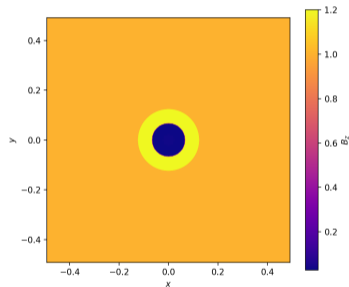
Rayons caractéristiques

Plusieurs régimes

$$M_A = \frac{v_0}{v_A}, \quad v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 m_a n_{a,0}}}$$



(a) Régime sub-alfvénique : $M_A \ll 1$



(b) Régime super-alfvénique : $M_A \gg 1$

Figure – Champ magnétique dans le plan $z = 0$ en unités de B_0 (simulations MHD Kalypso)

Rayons caractéristiques

Comparaison

- Rayon magnétique ($M_A \ll 1$) : énergie cinétique des débris → énergie magnétique

$$R_B = \left(\frac{3\mu_0 N_d m_d v_0^2}{4\pi B_0^2} \right)^{1/3}$$

- Rayon de masse équivalente ($M_A \gg 1$) : énergie cinétique des débris → énergie cinétique des ambiants

$$R_m = \left(\frac{3N_d m_d}{4\pi n_{a,0} m_a} \right)^{1/3}$$

- Rayon maximal : prise en compte des deux effets

$$R_{\max} = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{N_d m_d v_0^2}{\frac{B_0^2}{\mu_0} + n_{a,0} m_a v_0^2} \right)^{1/3}$$

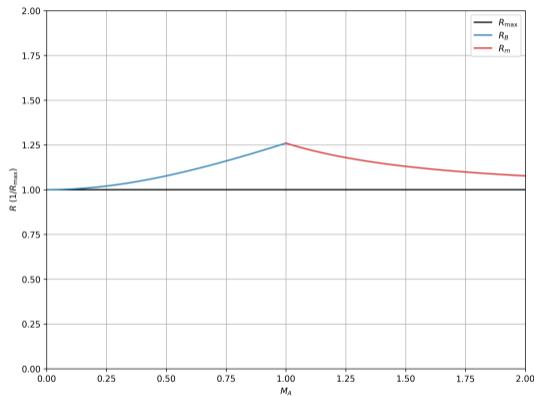


Figure – Comparaison des rayons caractéristiques à R_{\max}



2 ■ Modèles

Table des matières

1. Cavités diamagnétiques

2. Modèles

Bilan énergétique

Modèle hybride pour le cas super-alfvénique

3. Base de données de simulations

4. Apprentissage automatique



Bilan énergétique

Bilan énergétique

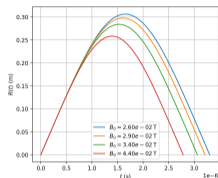
Impact des différents paramètres

$$E(t) = \frac{m_d N_d \dot{R}(t)^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{4\pi}{3} R(t)^3 + \frac{m_a n_{a,0} v_0^2}{2} \frac{4\pi}{3} R^3(t)$$

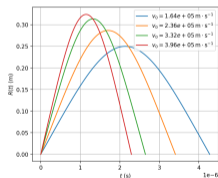
$$\dot{E}(t) = 0$$

↓

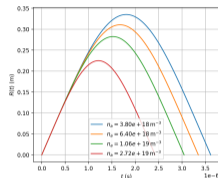
$$\ddot{R}(t) + 2\pi \frac{\frac{B_0^2}{\mu_0} + n_{a,0} m_a v_0^2}{N_d m_d} R^2(t) = 0$$



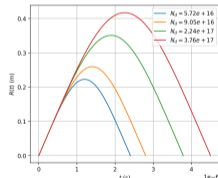
(a) Variation de B_0



(c) Variation de v_0



(b) Variation de $n_{a,0}$



(d) Variation de N_d

Figure – Rayon théorique en fonction du temps (estimation énergétique)

Bilan énergétique

Résultats

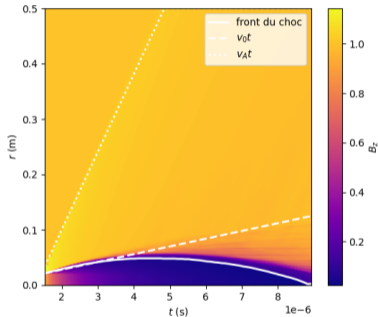


Figure – Carte magnétique d'une cavité sub-alfvénique (simulation MHD Kalypso)

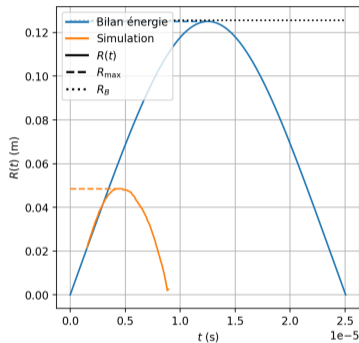


Figure – Comparaison des rayons théorique et simulé

Limites :

- Expansion non-sphérique
- Amplitude du champ fixée à B_0
- Pas de prise en compte des turbulences

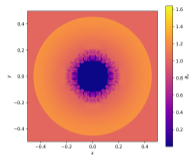


Modèle hybride pour le cas super- alfvénique

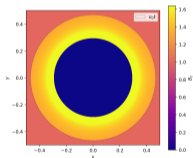
D'après [Bashurin et al., 1984]

Modèle hybride pour le cas super-alfvénique

Comparaison modèles / simulation

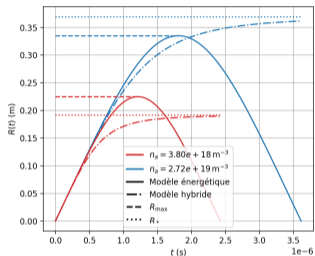


(a) Simulation MHD Kalypsso

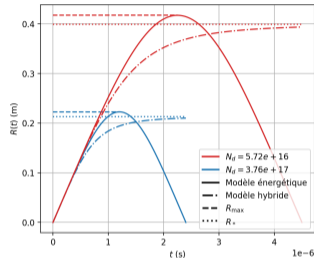


(b) Modèle hybride (ions cinétiques, électrons fluides)

Figure – Champ magnétique dans le plan $z = 0$ en unités de B_0



(a) Variation de $n_{a,0}$

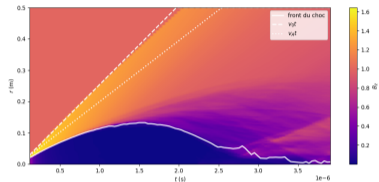


(b) Variation de N_d

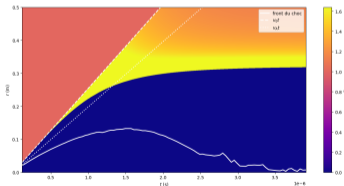
Figure – Rayon théorique en fonction du temps (modèles hybride et énergétique)

Modèle hybride pour le cas super-alfvénique

Résultats



(a) Simulation MHD Kalypsso



(b) Modèle hybride

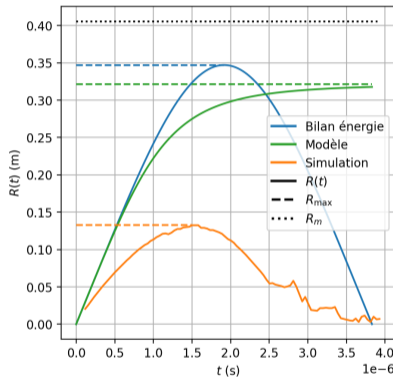


Figure – Comparaison des rayons théoriques et simulé



3 ■ Base de données de simulations

Table des matières

1. Cavités diamagnétiques
2. Modèles
- 3. Base de données de simulations**
Adimensionnement et admissibilité des paramètres
Sélection des profils pertinents
4. Apprentissage automatique



Adimensionnement et admissibilité des paramètres

Adimensionnement et admissibilité des paramètres

Définitions

	Plasma ambiant	Cavité
Paramètres physiques	$B_0, n_{a,0}$	v_0, N_d
Paramètres adimensionnels	$\frac{\rho_a}{L}, \frac{d_a}{L}$	$M_A, \frac{\rho_a}{R_*}$

Table – Paramètres physiques et adimensionnels

L : côté de la boîte de simulation

$$\blacksquare \rho_a = \frac{c}{\omega_{c,a}}, \quad \omega_{c,a} = \frac{Z_a e B_0}{m_a}$$

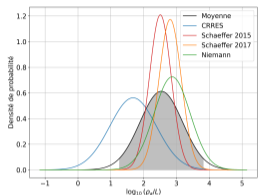
$$\blacksquare d_a = \frac{c}{\omega_{p,a}}, \quad \omega_{p,a} = \sqrt{\frac{n_{a,0} Z_a^2 e^2}{m_a \epsilon_0}}$$

$$\blacksquare M_A = \frac{v_0}{v_A}, \quad v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 m_a n_{a,0}}}$$

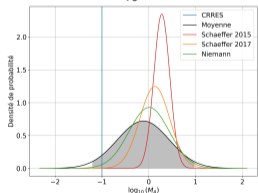
$$\blacksquare R_* = \left(\frac{3 N_d Z_d}{4 \pi n_{a,0} Z_a} \right)^{1/3}$$

Adimensionnement et admissibilité des paramètres

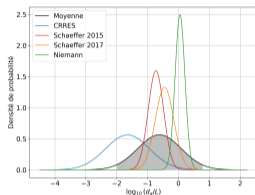
Gammes de paramètres issus de la littérature



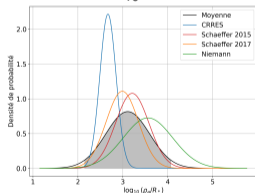
(a) $\log_{10}(\rho_a/L)$



(c) $\log_{10}(M_A)$



(b) $\log_{10}(d_a/L)$



(d) $\log_{10}(\rho_a/R_*)$

Références :

- [Huba et al., 1992]
- [Niemann et al., 2013]
- [Schaeffer et al., 2015]
- [Schaeffer et al., 2017]

$\log_{10}(\dots)$	μ	σ	inf	sup
ρ_a/L	2.54	0.65	1.26	3.82
d_a/L	-0.61	0.71	-2.00	0.77
M_A	-0.12	0.55	-1.20	0.97
ρ_a/R_*	3.11	0.49	2.15	4.07

Table – Dispersion des paramètres issus de la littérature

Figure – Dispersion des paramètres issus de la littérature et plages retenues en noir

Adimensionnement et admissibilité des paramètres

Contraintes liées à la simulation

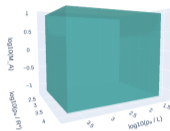
- Condition sur le temps final :

$$\begin{cases} v_A t_f < L/2, & M_A < 1 \\ v_0 t_f < L/2, & M_A > 1 \end{cases}$$

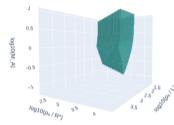
- Condition sur le rayon initial :

$$R_{\max} > r_0$$

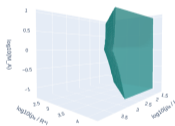
$$(r_0 = 2 \cdot 10^{-2} L \text{ fixé})$$



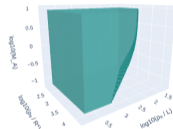
(a) Domaine sans contraintes



(b) Domaine contraint ($\approx 20\%$)



(c) Condition sur le temps final ($\approx 36\%$)



(d) Condition sur le rayon initial ($\approx 83\%$)

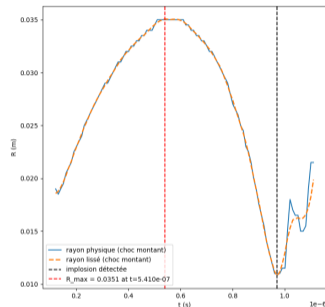
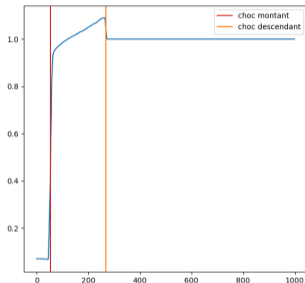
Figure – Représentation du domaine de paramètres en fonction des contraintes imposées



Sélection des profils pertinents

Sélection des profils pertinents

Détection de l'implosion de la cavité



(a) Détection des fronts de choc de la cavité

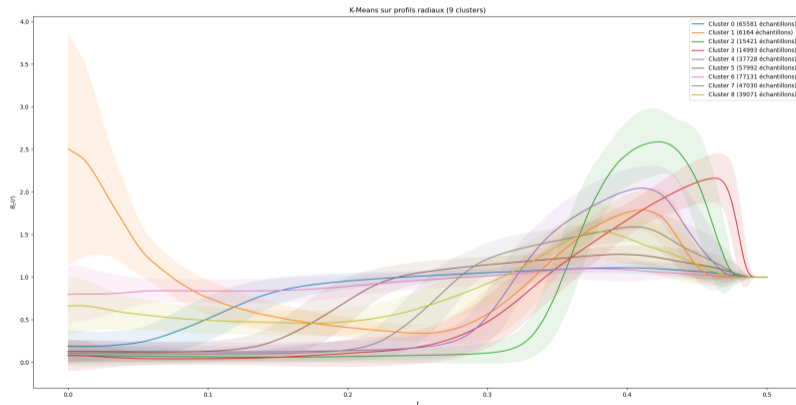
(b) Extraction du rayon de la cavité et détection de l'implosion

Figure – Procédure d'élimination des profils simulés après l'implosion de la cavité

402.500 profils → 361.111 profils ($\approx 90\%$)

Sélection des profils pertinents

Détection des profils non-physiques par clustering



Cluster 1 : profils
survenus après
l'implosion de la cavité

361.111 profils
↓
354.947 profils
($\approx 98\%$ soit $\approx 88\%$ du
total)

Figure – Division de la base de données en 9 clusters par la méthode *K*-means



4. Apprentissage automatique

Table des matières

1. Cavités diamagnétiques
2. Modèles
3. Base de données de simulations
4. **Apprentissage automatique**
Prédiction de profils magnétiques
Application : formation des chocs



Prédiction de profils magnétiques

Prédiction de profils magnétiques

Réseau utilisé

■ Architecture :

■ 5 entrées :

$$\log_{10} \frac{\rho_a}{L}, \log_{10} \frac{d_a}{L}, \log_{10} M_A, \log_{10} \frac{\rho_a}{R_*}, \log_{10} t\omega_{c,a}$$

■ 4 couches cachées de 4096 neurones

■ 1000 sorties :

$$(B_z(r, z = 0; t))_{0 < r < L/2}$$

→ 54.465.512 paramètres (54.448.128 poids et 17.384 biais)

■ Fonction de coût hybride $L^2 \rightarrow L^1$

■ Taille de batch : 128

■ Nombre d'époques : 5000

■ Taux d'apprentissage adaptatif : $10^{-3} \rightarrow 10^{-7}$

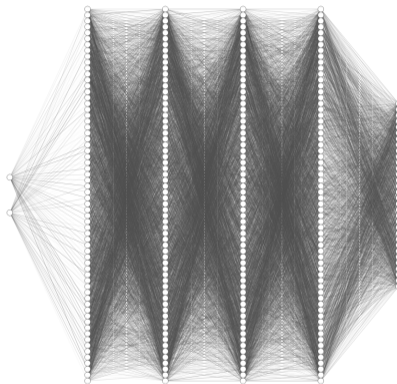


Figure – Schéma représentant un réseau de neurones dense ($2 \rightarrow 64 \rightarrow 64 \rightarrow 64 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \Rightarrow \approx 15.000$ paramètres)

Prédiction de profils magnétiques

Métriques d'entraînement

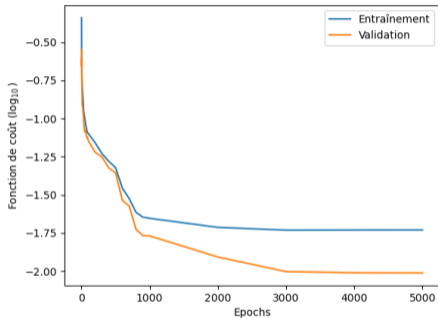


Figure – Evolution des fonctions de coût calculées sur l'ensemble d'entraînement (en bleu) et l'ensemble de validation (en orange), en fonction du nombre d'epochs

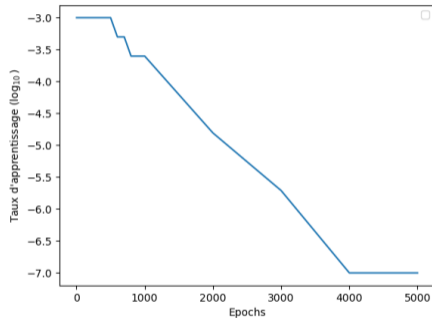


Figure – Evolution du taux d'apprentissage en fonction du nombre d'epochs

Erreur finale sur l'ensemble de validation $\approx 9,5 \cdot 10^{-3}$

Prédiction de profils magnétiques

Résultats : comparaison des profils magnétiques

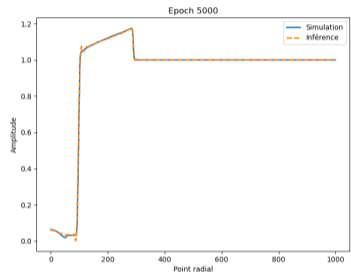


Figure – Evolution de la prédiction d'un profil magnétique en fonction du nombre d'epochs

Figure – Comparaison d'un profil magnétique prédit par apprentissage automatique au profil magnétique obtenu par simulation

Prédiction de profils magnétiques

Résultats : comparaison des cartes magnétiques

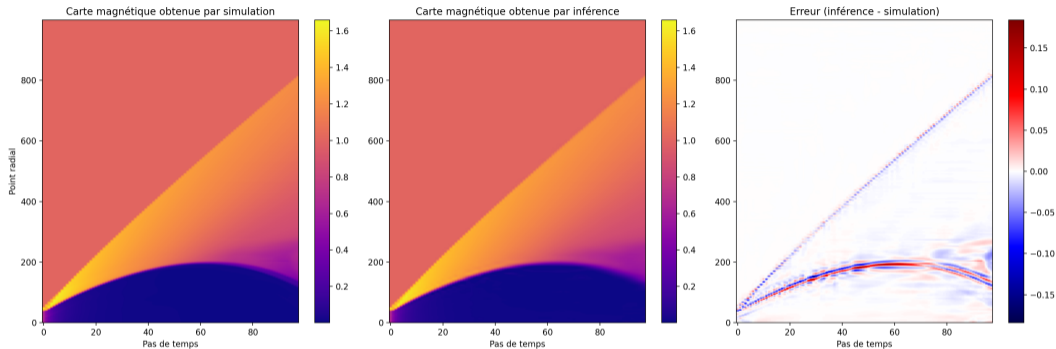
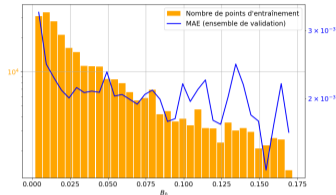


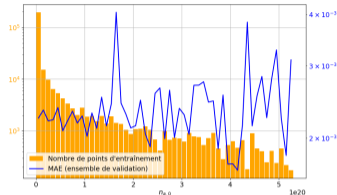
Figure – Comparaison d'une carte magnétique prédite par apprentissage automatique à la carte magnétique obtenue par simulation (21% des profils dans l'ensemble de validation)

Prédiction de profils magnétiques

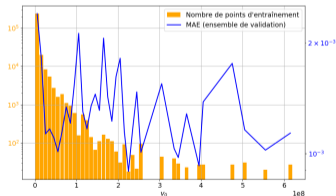
Domaine de validité du métamodèle



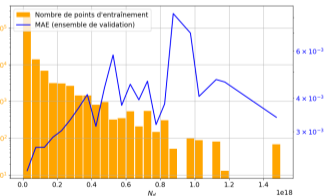
(a) Erreur du métamodèle en fonction de B_0



(b) Erreur du métamodèle en fonction de $n_{a,0}$



(c) Erreur du métamodèle en fonction de v_0



(d) Erreur du métamodèle en fonction de N_d

Figure – Erreur du métamodèle en fonction des paramètres physiques d'entrée et nombre de points d'entraînement



Application : formation des chocs

Application : formation des chocs

Caractérisation d'un choc

3 critères [Schaeffer et al., 2015] :

- Régime super-alfvénique ($M_A > 1$)
- Largeur du front de compression $< d_a$
- Hauteur du front de compression $> M_A$

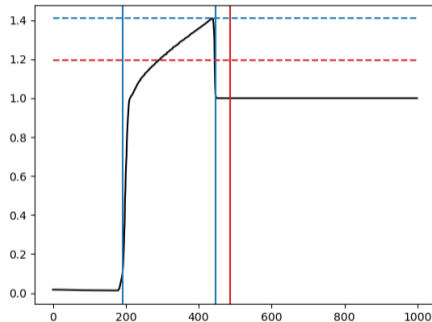
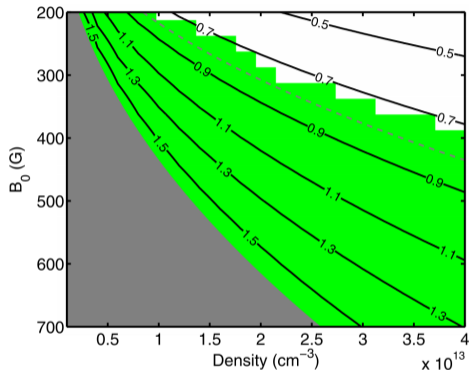


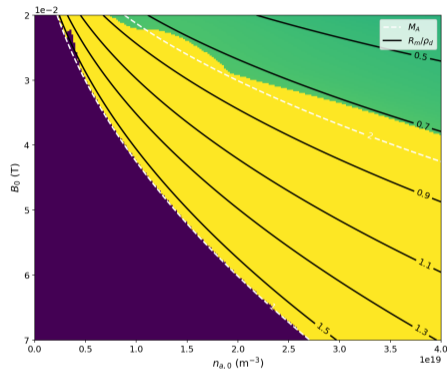
Figure – Profil magnétique répondant aux critères de formation d'un choc

Application : formation des chocs

Comparaison avec la littérature



(a) [Clark et al., 2013] (profils présentant un choc en vert)

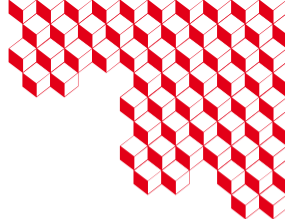


(b) Inférence (profils présentant un choc en jaune, profils ne remplissant pas l'un des critères en vert, profils non conformes en violet)

Figure – Comparaison des résultats sur la formation d'un choc en fonction de $n_{a,0}$ et B_0



INSTITUT
POLYTECHNIQUE
DE PARIS



Merci pour votre attention !

CEA/DAM Île-de-France
Bruyères-le-Châtel
91297 Arpajon CEDEX

Bibliographie I



Bashurin, V. P., Golubev, A. I., and Terekhin, V. A. (1984).

The collisionless deceleration of an ionized cloud dispersing in a uniform plasma in a magnetic field.

Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 24(5):614–620.



Clark, S. E., Winske, D., Schaeffer, D. B., Everson, E. T., Bondarenko, A. S., Constantin, C. G., and Niemann, C. (2013).

Hybrid simulation of shock formation for super-Alfvénic expansion of laser ablated debris through an ambient, magnetized plasma.

Physics of Plasmas, 20(8).



Dimonte, G. and Wiley, L. G. (1991).

Dynamics of exploding plasmas in a magnetic field.

Phys. Rev. Lett., 67:1755–1758.








Huba, J. D., Bernhardt, P. A., and Lyon, J. G. (1992).

Preliminary study of the CRRES magnetospheric barium releases.

Journal of Geophysical Research Atmospheres, 97(A1):11–24.

Bibliographie II

- 
-  Niemann, C., Gekelman, W., Constantin, C. G., Everson, E. T., Schaeffer, D. B., Clark, S. E., Winske, D., Zylstra, A. B., Pribyl, P., Tripathi, S. K. P., Larson, D., Glenzer, S. H., and Bondarenko, A. S. (2013). Dynamics of exploding plasmas in a large magnetized plasma. *Physics of Plasmas*, 20(1).
-  Schaeffer, D. B., Everson, E. T., Bondarenko, A. S., Clark, S. E., Constantin, C. G., Winske, D., Gekelman, W., and Niemann, C. (2015). Experimental study of subcritical laboratory magnetized collisionless shocks using a laser-driven magnetic piston. *Physics of Plasmas*, 22(11).
-  Schaeffer, D. B., Winske, D., Larson, D. J., Cowee, M. M., Constantin, C. G., Bondarenko, A. S., Clark, S. E., and Niemann, C. (2017). On the generation of magnetized collisionless shocks in the large plasma device. *Physics of Plasmas*, 24(4).
-  Valenzuela, A., Haerendel, G., Föppl, H., Melzner, F., Neuss, H., Rieger, E., Stöcker, J., Bauer, O., Höfner, H., and Loidl, J. (1986). The AMPTE artificial comet experiments. *Nature*, 320(6064):700–703.



A ■ Annexes

Table des matières

5. Annexes

Equations fluides en MHD idéale

Calcul des rayons caractéristiques

Rayon de charge équivalente

Equation d'évolution du rayon de la cavité

Hypothèses et solution du modèle hybride

Paramètres adimensionnels

Contraintes liées à la simulation

Fonctions de coût

Equations fluides en MHD idéale

Description mono-fluide du plasma

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) = 0 \\ \rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

+ équation de fermeture sur P

Effets diffusifs/résistifs, viscosité et terme Hall négligés.

Calcul des rayons caractéristiques

Rayon magnétique ($M_A \ll 1$)

$$\frac{N_d m_d v_0^2}{2} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{4\pi}{3} R_B^3 \Rightarrow R_B = \left(\frac{3\mu_0 N_d m_d v_0^2}{4\pi B_0^2} \right)^{1/3}$$

Rayon de masse équivalente ($M_A \gg 1$)

$$\frac{N_d m_d v_0^2}{2} = \frac{n_{a,0} m_a v_0^2}{2} \frac{4\pi}{3} R_m^3 \Rightarrow R_m = \left(\frac{3N_d m_d}{4\pi n_{a,0} m_a} \right)^{1/3}$$

Rayon maximal

$$\frac{N_d m_d v_0^2}{2} = \left(\frac{B_0^2}{2\mu_0} + \frac{n_{a,0} m_a v_0^2}{2} \right) \frac{4\pi}{3} R_{\max}^3 \Rightarrow R_{\max} = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{N_d m_d v_0^2}{\frac{B_0^2}{\mu_0} + n_{a,0} m_a v_0^2} \right)^{1/3}$$

Rayon de charge équivalente

$$R_* = \left(\frac{3N_d Z_d}{4\pi n_{a,0} Z_a} \right)^{1/3}, \quad M^3 = \frac{Z_d m_a}{Z_a m_d}$$

- $M^3 = 1/2$: expansion de C^{6+} dans H^+
- $M^3 = 1/3$: expansion de C^{4+} dans H^+
- $M^3 = 1/12$: expansion de C^+ dans H^+
- $M^3 = 2$: expansion de C^{6+} dans He^+

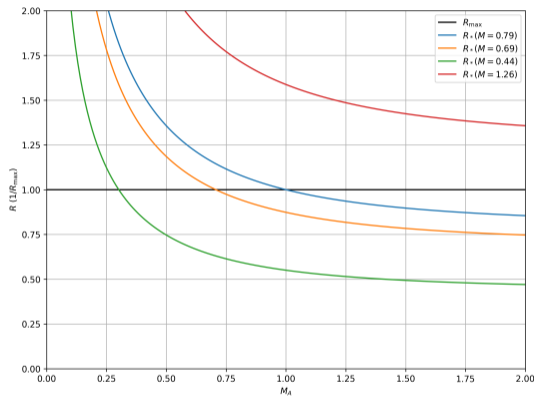


Figure – Comparaison de R_* à R_{max} pour différents paramètres de magnétisation

Equation d'évolution du rayon de la cavité

$$E(t) = \frac{m_d N_d \dot{R}(t)^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{4\pi}{3} R(t)^3 + \frac{m_a n_{a,0} v_0^2}{2} \frac{4\pi}{3} R^3(t)$$

$$\dot{E}(t) = 0 \implies \ddot{R}(t) + 2\pi \frac{\frac{B_0^2}{\mu_0} + n_{a,0} m_a v_0^2}{N_d m_d} R^2(t) = 0$$

Solution

$$R(t) = \begin{cases} R_{\max} \left(B^{-1} \left(\frac{3v_0}{R_{\max}} t; \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) \right)^{1/3}, & 0 < t < t_{\max} \\ R_{\max} \left(B^{-1} \left(\frac{3v_0}{R_{\max}} (2t_{\max} - t); \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) \right)^{1/3}, & t_{\max} < t < 2t_{\max} \end{cases}$$

$$\text{avec } R_{\max} = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{N_d m_d v_0^2}{\frac{B_0^2}{\mu_0} + n_{a,0} m_a v_0^2} \right)^{1/3} \quad \text{et } t_{\max} = \frac{R_{\max}}{3v_0} B \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right).$$

Hypothèses et solution du modèle hybride

- Ions (équation de Vlasov) : $\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_i + \frac{q_i}{m_i} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_i = 0$
- Electrons (équation fluide) : $\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$
- Conditions initiales : $\begin{cases} f_d(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t = 0) = N_d \delta(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{v}) \\ f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t = 0) = n_{a,0} \delta(\mathbf{v}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t = 0) = \mathbf{B}_0 \end{cases}$ avec $\int \psi(\mathbf{v}) d^3 \mathbf{v} = 1$

Solution

$$B_z(r, \theta, t) = \begin{cases} 0, & r \in [0, R(t)] \\ B_0 R_*^2 \left(\frac{1}{R(t)^3} - \frac{1}{r^3} \right)^{-1/3} \left(\left(\frac{1}{R(t)^3} - \frac{1}{r^3} \right) \cos^2(\theta) + \frac{1}{R(t)^3} \sin^2(\theta) \right), & r \in]R(t), v_0 t[\\ B_0, & r \in [v_0 t, +\infty[\end{cases}$$

$$\text{avec } R(t) = \left(\frac{R_*^3 (v_0 t)^3}{R_*^3 + (v_0 t)^3} \right)^{1/3}.$$

Paramètres adimensionnels

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_a}{L}(B_0) = \frac{cm_a}{Z_a e L} B_0^{-1} \\ \frac{d_a}{L}(n_{a,0}) = \frac{c}{L} \left(\frac{\epsilon_0 m_a}{(Z_a e)^2} \right)^{1/2} n_{a,0}^{-1/2} \\ M_A(B_0, n_{a,0}, v_0) = \sqrt{\mu_0 m_a} B_0^{-1} n_{a,0}^{1/2} v_0 \\ \frac{\rho_a}{R_*}(B_0, n_{a,0}, N_d) = \frac{cm_a}{Z_a e} \left(\frac{4\pi Z_a}{3Z_d} \right)^{1/3} B_0^{-1} n_{a,0}^{1/3} N_d^{-1/3} \end{array} \right.$$

\Leftrightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 \left(\frac{\rho_a}{L} \right) = \frac{cm_a}{Z_a e L} \left(\frac{\rho_a}{L} \right)^{-1} \\ n_{a,0} \left(\frac{d_a}{L} \right) = \frac{\epsilon_0 c^2 m_a}{(Z_a e)^2 L^2} \left(\frac{d_a}{L} \right)^{-2} \\ v_0 \left(\frac{\rho_a}{L}, \frac{d_a}{L}, M_A \right) = c \left(\frac{\rho_a}{L} \right)^{-1} \frac{d_a}{L} M_A \\ N_d \left(\frac{\rho_a}{L}, \frac{d_a}{L}, \frac{\rho_a}{R_*} \right) = L \frac{4\pi \epsilon_0 c^2 m_a}{3Z_a Z_d e^2} \left(\frac{\rho_a}{L} \right)^3 \left(\frac{d_a}{L} \right)^{-2} \left(\frac{\rho_a}{R_*} \right)^{-3} \end{array} \right.$$

Contraintes liées à la simulation

Condition sur le temps final

■ $M_A < 1$:

$$v_A t_f < \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_a}{L} \left(\frac{\rho_a}{R_*} \right)^{-1} M_A^{-1} (1 + M_A^{-2})^{-1/3} < \frac{3}{4} \frac{M}{B(1/3, 1/2)}$$

■ $M_A > 1$:

$$v_0 t_f < \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_a}{L} \left(\frac{\rho_a}{R_*} \right)^{-1} (1 + M_A^{-2})^{-1/3} < \frac{3}{4} \frac{M}{B(1/3, 1/2)}$$

Condition sur le rayon initial

$$R_{\max} > r_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_a}{L} \left(\frac{\rho_a}{R_*} \right)^{-1} (1 + M_A^{-2})^{-1/3} > 2 \cdot 10^{-2} M$$

$r_0 = 2 \cdot 10^{-2} L$ fixé

Fonctions de coût

- Erreur quadratique moyenne :

$$\text{MSE}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{n_{\text{sorties}}} \sum_{i=1}^{n_{\text{sorties}}} |y_i - \hat{y}_i|^2$$

- Erreur absolue moyenne :

$$\text{MAE}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{n_{\text{sorties}}} \sum_{i=1}^{n_{\text{sorties}}} |y_i - \hat{y}_i|$$

- Hybride :

$$C(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) = w_{\alpha}(x)\text{MAE}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) + (1 - w_{\alpha}(x))\text{MSE}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}})$$

$$\text{où } x = \frac{\text{epoch}}{\text{epoch_max}} \text{ et } w_{\alpha}(x) = \frac{1}{1 + \exp\left(-2\alpha\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\right)}$$

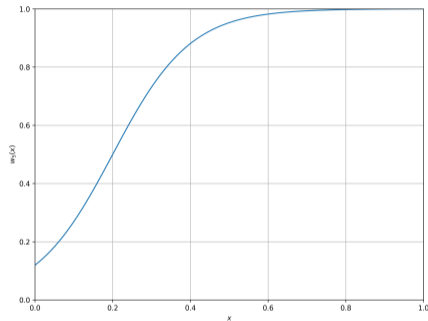


Figure – $[0, 1] \ni x \mapsto w_{\alpha}(x)$ pour $\alpha = 5$