



ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET
CHAUSSÉES
INSTITUT POLYTECHNIQUE DE PARIS
Département d'ingénierie mathématique et
informatique

COMMISSARIAT À L'ÉNERGIE ATOMIQUE
ET AUX ÉNERGIES ALTERNATIVES
DIRECTION DES APPLICATIONS MILITAIRES
Centre DAM Île-de-France

Rapport de stage

Cavités diamagnétiques : modèles analytiques,
simulations numériques et apprentissage automatique

Clément MAZZOCCHI

sous la supervision de
Renaud FERRAND

27/08/2025 - 06/02/2026

Table des matières

1	Introduction	3
2	Contexte physique	5
2.1	Le plasma et ses paramètres caractéristiques	5
2.2	Description fluide du plasma : la magnétohydrodynamique	6
3	État de l'art : études analytiques, numériques et expérimentales	9
4	Théorie et simulation des cavités diamagnétiques	12
4.1	Grandeurs caractéristiques	12
4.2	Bilan énergétique	15
4.3	Dérivation d'un modèle analytique	17
4.4	Comparaison avec les simulations	22
4.4.1	Régime sub-alfvénique	23
4.4.2	Régime super-alfvénique	29
5	Approche par apprentissage automatique	39
5.1	Adimensionnement et admissibilité des paramètres physiques	39
5.2	Génération d'une base de données de simulations	43
5.3	Sélection des profils pertinents	43
5.4	Conception d'un métamodèle	45
5.4.1	Introduction aux réseaux de neurones artificiels	45
5.4.2	Stratégies d'entraînement	47
5.4.3	Optimisation des hyperparamètres par validation croisée	49
6	Résultats	51
7	Application : formation des chocs	55
8	Conclusions et perspectives	58
A	Annexe	59

1 Introduction

Le plasma est l'état de la matière le plus abondant dans l'univers. Gaz composé de particules ionisées et d'électrons, il interagit avec le champ électromagnétique, ce qui en fait le siège de phénomènes physiques complexes. Il est le principal composant du milieu interstellaire, mais on le trouve également plus proche de nous : à la surface de notre étoile, le Soleil ; dans la magnétosphère qui entoure notre planète ; dans les laboratoires de physique des plasmas enfin, où il est étudié pour mieux comprendre les mécanismes de la fusion nucléaire notamment.

Le plasma peut être décrit à l'échelle macroscopique comme un fluide ou à l'échelle microscopique comme un ensemble de particules individuelles ; il est alors modélisé par des théories hydrodynamiques ou cinétiques respectivement. Dans les deux cas, les approches analytiques se heurtent rapidement à la complexité des équations en jeu. Avec le développement de centres de calcul toujours plus performants, le recours à la simulation s'est généralisé. Des codes de calcul très complets parviennent à modéliser avec une précision importante des phénomènes physiques variés.

Toutefois, le temps de calcul et l'énergie consommée par la simulation ne permettent pas d'envisager la production de nombreuses simulations, nécessaires pour la réalisation d'études paramétriques notamment. C'est pourquoi les approches d'apprentissage automatique (*machine learning*), en plein développement, suscitent de plus en plus l'intérêt des industriels comme des laboratoires académiques.

Contexte et enjeux Parmi les nombreux phénomènes se produisant en milieu plasma, les cavités diamagnétiques constituent un exemple frappant de l'interaction plasma-champ magnétique, pertinent à la fois en astrophysique et en laboratoire. Il s'agit de zones de faible champ magnétique qui apparaissent lors de l'expansion d'un plasma dans un champ magnétique ambiant.

Les premières observations des cavités diamagnétiques ont eu lieu lors d'expériences à grande échelle, en 1984 ([9]) et 1990 ([4]), qui consistaient à effectuer des lâchers de baryum à 110 000 kilomètres d'altitude. L'objectif était d'étudier *in situ* l'expansion d'un plasma dans le champ magnétique terrestre. Lors de son expansion, le nuage de baryum crée une sorte de comète artificielle qui perturbe le champ magnétique ambiant et résulte en la formation d'une cavité hors de laquelle les lignes de champ sont repoussées.

Ces expériences ont été suivies de simulations numériques sur le sujet, puis d'expériences de laboratoire. Ces dernières ont l'avantage de permettre d'observer le phénomène dans des conditions d'expérimentation maîtrisées et reproductibles. L'astrophysique de laboratoire repose sur l'existence de lois d'échelle permettant de relier des expériences menées en laboratoire à des phénomènes astrophysiques de dimensions très différentes ; elle met ainsi en œuvre des dispositifs expérimentaux moins coûteux, dont les résultats peuvent être directement confrontés aux simulations numériques.

Les codes de simulation de physique des plasmas sont de deux sortes : les codes hydrodynamiques, qui considèrent le plasma comme un fluide et reposent sur la théorie de la magnétohydrodynamique ; les codes cinétiques, qui résolvent la trajectoire de chacune des particules du système. Il existe également des codes hybrides qui considèrent les ions comme des particules se mouvant dans un fluide d'électrons. On utilise l'une ou l'autre de ces modalités en fonction du phénomène considéré et de son échelle, mais dans tous les cas ces codes nécessitent pour fonctionner de grandes ressources de calcul. C'est ce qui justifie l'utilisation de techniques d'intelligence artificielle pour suppléer l'expérience, la modélisation théorique et la simulation numérique.

L'utilisation de l'apprentissage automatique en physique représente un vrai changement de paradigme : les méthodes développées jusqu'à maintenant, qu'elles soient analytiques ou qu'elles relèvent de la simulation, s'appuyaient sur les équations physiques régissant le phénomène considéré avec pour objectif soit de les résoudre, soit de simuler grâce à elles ledit phénomène numériquement. La philosophie du *machine learning* est tout autre : il s'agit d'une approche *data-driven*. Le modèle est entraîné à partir d'exemples (générés par simulation ou échantillonnés directement), sans connaissance explicite des équations physiques. Si la démarche scientifique classique repose sur l'hypothèse que des lois physiques universelles gouvernent les phénomènes étudiés, les méthodes d'apprentissage automatique font le pari qu'un nombre suffisant d'exemples permet d'en inférer les structures sous-jacentes. Il convient toutefois de nuancer ce point : des approches

dites *physics-informed* intègrent explicitement ces lois dans l'apprentissage, et peuvent même, dans certains cas, se fonder exclusivement sur les équations, se rapprochant alors davantage de méthodes alternatives de simulation que du *machine learning* purement inductif.

Si l'entraînement nécessite de nombreux exemples générés par des simulations classiques, l'intérêt réside dans la capacité de généralisation du modèle. Une fois entraîné, le modèle peut inférer des résultats sur des situations non présentes dans les données d'apprentissage. De plus, cette phase d'inférence est rapide : une fois le modèle entraîné, on a accès de manière efficace à de nombreux résultats, parfois dans des gammes de paramètres que l'on ne sait pas simuler, grâce à la capacité de généralisation du modèle -alors qu'il est nécessaire de générer une nouvelle simulation, ou d'effectuer une nouvelle mesure, dès qu'un paramètre varie.

Objectifs du stage Notre objectif est de concevoir et utiliser des outils d'apprentissage automatique pour étudier les cavités diamagnétiques, que ce soit dans un contexte astrophysique ou de plasmas générés par laser. Cet objectif exige la compréhension profonde du phénomène physique en jeu et de la théorie sous-jacente, ainsi que la maîtrise du code de simulation fluide utilisé. Nous devons déterminer les paramètres physiques pertinents et les adimensionner pour assurer la reproductibilité de notre démarche. Puis, nous devons générer une base de données variée et représentative des situations physiques envisagées.

Cette base de données sera ensuite utilisée pour l'entraînement d'un réseau de neurones, dont il faudra décider de l'architecture et des stratégies d'entraînement. Ce métamodèle devra être capable de prédire le comportement d'une cavité (comme l'évolution de son champ magnétique) à partir de quelques paramètres d'entrée pertinents. Une analyse quantitative et physique des performances du métamodèle sera bien sûr effectuée. Enfin, nous pourrions imaginer des applications basées sur ce métamodèle, par exemple pour la détection des chocs.

Organisation du rapport Nous présenterons d'abord le contexte physique de nos travaux (section 2), avec des rappels sur les paramètres caractéristiques du plasma et une introduction à la magnétohydrodynamique, la théorie fluide qui permet de modéliser les cavités diamagnétiques. Puis, nous dresserons l'état de l'art de notre sujet (section 3). Nous nous intéresserons aux solutions analytiques et numériques développées jusqu'à maintenant pour décrire les cavités diamagnétiques en partant des expériences physiques inaugurales des années 1980.

Nous exposerons ensuite quelques éléments théoriques permettant de dégager des paramètres caractéristiques pertinents pour l'étude des cavités. Nous détaillerons également la dérivation analytique d'un modèle hybride simple, qui permettra de comprendre la physique en jeu. Nous comparerons tous les résultats obtenus aux données de simulation (section 4).

Dans la section 5, nous détaillerons la conception du métamodèle, de la génération de la base de données à l'optimisation fine des paramètres du réseau de neurones, en passant par le prétraitement des données de simulation, les problématiques d'architecture du modèle et les stratégies développées pour son entraînement.

Enfin, nous exposerons les résultats obtenus (section 6) et discuterons de leur validité. Puis nous présenterons quelques applications réalisées grâce aux outils développés (section 7).

2 Contexte physique

2.1 Le plasma et ses paramètres caractéristiques

Le plasma constitue la quasi-totalité de la matière observable dans l'univers. Dans cet état, la matière est ionisée : les électrons sont arrachés aux atomes. La physique des plasmas décrit le couplage entre la matière ionisée et le champ électromagnétique. À l'échelle microscopique, la matière n'est plus neutre et peut donc être le siège de phénomènes extrêmement complexes. Pourtant, le plasma est neutre à l'échelle macroscopique. Cette neutralité résulte des forces électrostatiques très intenses qui compensent, sur des échelles de temps et d'espace très courtes, les écarts à la neutralité.

Lorsqu'un léger déséquilibre de charge apparaît, les électrons -bien plus légers que les ions- se déplacent rapidement pour rétablir la neutralité. Ce mouvement collectif engendre des oscillations autour de la position d'équilibre, à la pulsation plasma électronique

$$\omega_{p,e} = \left(\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2}$$

où n_e est la densité d'électrons, e la charge élémentaire, m_e la masse électronique et ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide. Les écarts à la neutralité sont donc compensés sur une échelle de temps de l'ordre de $\omega_{p,e}^{-1}$. Pour des phénomènes à des échelles temporelles supérieures à $\omega_{p,e}^{-1}$, la quasi-neutralité macroscopique peut être supposée.

On peut également définir une échelle spatiale pour la compensation des écarts à la neutralité. Pour un plasma chaud, les particules se déplacent à la vitesse thermique, ce qui conduit à la longueur de Debye :

$$\lambda_D = \left(\frac{k_B T_e}{m_e} \right)^{1/2} \frac{1}{\omega_{p,e}} = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2} \right)^{1/2}$$

avec k_B la constante de Boltzmann et T_e la température électronique. Au-delà de la sphère de Debye, les effets collectifs dominent : on appelle ce phénomène l'écrantage électrique. La longueur de Debye correspond donc à l'échelle au-delà de laquelle un champ électrostatique est fortement atténué par la réorganisation des charges dans le plasma. Si maintenant on considère la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma, on peut introduire la longueur caractéristique

$$d_e = \frac{c}{\omega_{p,e}}$$

Cette longueur, appelée longueur d'inertie électronique, caractérise l'échelle spatiale minimale sur laquelle les variations du champ magnétique se propagent efficacement dans le plasma. Au-delà de cette longueur, les courants induits dans le plasma tendent à s'opposer aux variations du champ, ce qui conduit à un amortissement des perturbations magnétiques.

De manière analogue, chaque espèce ionique possède sa propre pulsation plasma et sa longueur d'inertie

$$\omega_{p,i} = \left(\frac{n_i q_i^2}{m_i \epsilon_0} \right)^{1/2}, \quad d_i = \frac{c}{\omega_{p,i}}$$

beaucoup plus faibles et plus grandes respectivement en raison de leur masse bien supérieure à celle des électrons.

Ainsi, à l'échelle macroscopique, nous pourrions considérer que le plasma est quasi-neutre :

$$\sum_s n_s q_s = 0$$

Considérons à présent une particule chargée ponctuelle placée dans un champ magnétique uniforme d'amplitude B . Cette particule décrit alors une trajectoire hélicoïdale autour des lignes du champ, à la pulsation cyclotronique

$$\omega_{c,s} = \frac{|q_s| B}{m_s}$$

Le rayon de cette trajectoire est appelé rayon de Larmor et vaut

$$\rho_s = \frac{v_s}{\omega_{c,s}}$$

où v_s est la vitesse de la particule dans le plan normal au champ.

Enfin, on donne la vitesse d'Alfvén qui est la vitesse de déplacement d'une onde associée à une perturbation magnétique :

$$v_{A,s} = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 n_s m_s}}$$

où n_s est la densité de particules, m_s la masse particulaire et μ_0 la perméabilité magnétique.

2.2 Description fluide du plasma : la magnétohydrodynamique

Une espèce s du plasma est décrite par une fonction de distribution f_s , telle que $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v}$ soit le nombre de particules de cette espèce évoluant à la vitesse \mathbf{v} au temps t et à la position \mathbf{r} . Un plasma non-collisionnel, c'est-à-dire tel que le libre parcours moyen des espèces qui le composent soit très supérieur à la taille du système, est régi par l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_s + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s = 0$$

Cette équation décrit l'évolution microscopique du plasma. Pour obtenir une description macroscopique, on introduit des grandeurs moyennes par intégration sur l'espace des vitesses.

Les grandeurs fluides sont les moments de la fonction de distribution :

- Densité : $n_s(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} f_s d\mathbf{v}$
- Vitesse : $\mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_s} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f_s d\mathbf{v}$
- Pression : $\mathbb{P}_s(\mathbf{r}, t) = m_s \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) f_s d\mathbf{v}$

Ces grandeurs correspondent à des tenseurs d'ordre 0, 1 et 2 : la densité est scalaire, la vitesse est un vecteur et la pression est un tenseur d'ordre 2. L'intégration de l'équation de Vlasov donne des équations entre ces différentes grandeurs fluides. Une première intégration donne l'équation de conservation de la densité :

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_s m_s) + \nabla \cdot (n_s m_s \mathbf{u}_s) = 0$$

Une intégration à l'ordre supérieur donne l'équation de conservation de l'impulsion :

$$n_s m_s \left(\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s \right) = -\nabla \cdot \mathbb{P}_s + n_s q_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B})$$

Le système fluide qui découle de l'équation de Vlasov est infini. En effet, ces équations de moments ne sont pas fermées : elles dépendent de quantités d'ordre supérieur, d'où la nécessité d'introduire des relations de fermeture.

Pour fermer le système fluide, nous faisons l'approximation que le plasma est isotrope et donc que le tenseur de pression est diagonal :

$$\mathbb{P}_s = P_s \mathbb{I}$$

Il existe de nombreuses équations de fermeture possibles selon la physique sous-jacente au système considéré. On utilise le plus souvent une équation polytropicque de la forme :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho_m^\gamma} \right) = 0$$

L'indice polytropique γ peut être choisi selon la situation physique considérée. $\gamma = 1$ correspond à un système isotherme ; $\gamma = \frac{5}{3}$ correspond à un système adiabatique ; $\gamma = +\infty$ décrit un système incompressible.

Les équations obtenues jusqu'à maintenant décrivent l'évolution de chaque espèce séparément. Pour décrire le comportement global du plasma et ses interactions avec le champ magnétique, on combine ces descriptions dans un cadre monofluide : la magnétohydrodynamique (MHD).

La MHD repose sur la condition de quasi-neutralité :

$$\rho_q = \sum_s n_s q_s \approx 0.$$

Sous cette hypothèse, on peut s'autoriser à définir la densité volumique de masse du plasma, sa vitesse, sa pression et son courant électrique :

$$\rho_m = \sum_s n_s m_s, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\rho_m} \sum_s n_s m_s \mathbf{u}_s, \quad P = \sum_s P_s, \quad \mathbf{j} = \sum_s n_s q_s \mathbf{u}_s$$

On fait également des hypothèses sur les échelles caractéristiques du système considéré : la durée de l'expérience doit être très grande devant $\frac{1}{\omega_{p,i}}$ et la taille caractéristique doit être très grande devant le rayon de Larmor ionique ρ_i . Nous négligeons également les effets de viscosité. Ces hypothèses nous permettent de nous placer dans le cadre de la MHD idéale.

Le système MHD est obtenu par couplage entre le système hydrodynamique et les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0} & \text{Maxwell-Gauss} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{Maxwell-Thomson} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{Maxwell-Faraday} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \text{Maxwell-Ampère} \end{cases}$$

Dans la limite non relativiste, le second terme du membre de droite de l'équation de Maxwell-Ampère est négligeable. Nous utiliserons donc la relation suivante entre le courant électrique et le champ magnétique : $\nabla \times \mathbf{B} \approx \mu_0 \mathbf{j}$. Nous rappelons aussi la loi d'Ohm

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \implies \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

où σ est la conductivité électrique du milieu considéré. Le premier terme modélise le fait que lorsqu'un conducteur solide est soumis à un champ électrique, le courant électrique qui le traverse est proportionnel au champ imposé. En MHD, les courants responsables des champs électriques sont transportés par la matière. Il faut donc ajouter à la loi d'Ohm un terme qui correspond en fait à un changement de référentiel. On peut raffiner cette expression par différents termes correctifs, le plus important étant le terme Hall. Nous nous plaçons en MHD idéale et considérons donc une conductivité électrique infinie, ce qui implique $\mathbf{E} \approx -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$.

La combinaison des équations de conservation de la densité et de l'impulsion, des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm donnent le système de la MHD idéale auquel il faut ajouter l'équation de fermeture appropriée :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) = 0 \\ \rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

Théorème d'Alfvén En MHD idéale, le théorème d'Alfvén ou théorème du champ gelé stipule que le flux du champ magnétique à-travers une surface Σ advectée par le plasma est stationnaire :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

En conséquence, les lignes de champ magnétique sont gelées dans le fluide. Ainsi, un mouvement du plasma entraîne une déformation des lignes de champ magnétique.

Comme nous allons le voir par la suite, une cavité diamagnétique résulte de l'expansion d'une boule de plasma dans un champ magnétique ambiant : le plasma, en s'expandant, déplace les lignes de champ et crée une zone de très faible champ magnétique : la cavité.

Force de Laplace D'après l'équation de Maxwell-Ampère dans le régime non-relativiste, la force (volumique) de Laplace s'écrit

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0} = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{\mu_0}$$

Le premier terme est égal à l'opposé du gradient de pression magnétique. Il se comporte comme une force de pression, qui a tendance à repousser le plasma des zones de forts champs magnétiques. Le deuxième terme est lié à la courbure locale du champ magnétique. Pour décrire la force de tension magnétique, on peut utiliser le repère local de Frenet (\mathbf{b}, \mathbf{n}) , où \mathbf{b} est tangent à la ligne de champ et \mathbf{n} normal. Ce terme s'écrit alors

$$\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{d}{ds} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{b} + \frac{B^2}{\mu_0 R} \mathbf{n}$$

où R est le rayon de courbure local de la ligne de champ. Il s'agit d'une force de tension qui annule, via son premier terme, la composante parallèle au champ de la pression magnétique.

C'est la force de Laplace qui freine l'expansion d'une cavité diamagnétique (en plus des échanges impulsionsnels avec le plasma ambiant). En effet, le gel des lignes de champ crée une zone de compression magnétique à la frontière de la cavité et le terme de pression magnétique est donc dirigé vers l'intérieur de la cavité. De plus, la courbure des lignes de champ autour de la cavité implique l'apparition du terme de tension magnétique.

3 État de l’art : études analytiques, numériques et expérimentales

Une cavité diamagnétique se forme lorsqu’une boule de plasma en expansion repousse localement les lignes du champ magnétique ambiant. Le système implique deux populations ioniques : les ions ambiants et les ions débris. Les ions ambiants sont initialement au repos, et ils subissent un champ magnétique vertical et uniforme d’amplitude B_0 . Les ions débris possèdent une certaine énergie, de nature thermique, qui provoque leur expansion. Ils ont donc une vitesse radiale (initialement v_0) et la boule de plasma qu’ils forment, en grandissant, transfère son énergie au plasma ambiant.

Depuis les années 1980, les cavités diamagnétiques font l’objet d’une recherche active, qu’il s’agisse de développements théoriques, d’aspects expérimentaux ou de simulations numériques. Nous proposons un panorama qui s’étend donc des expériences spatiales des années 1980 jusqu’aux études de laboratoire et simulations les plus récentes.

Contexte historique et fondements physiques De 1980 à 1990 ont lieu des expériences spatiales pionnières qui fondent l’étude des cavités diamagnétiques. L’analyse de ces expériences et les travaux théoriques qui les accompagnent conduisent aux premières interprétations physiques sur le phénomène.

Dès 1984, une modélisation de la décélération sans collision d’un nuage ionisé en expansion dans un plasma magnétisé est proposée par [1]. L’article étudie les mécanismes de décélération de la cavité diamagnétique et le transfert d’énergie entre le nuage et le plasma ambiant. Deux mécanismes de décélération sont identifiés. Ils correspondent à deux régimes qui dépendent du nombre d’Alfvén-Mach :

$$M_A = \frac{v_0}{v_A}, \quad v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 m_a n_{a,0}}}$$

- $M_A \ll 1$: l’interaction avec le champ magnétique domine, par le biais de la force de Laplace (pression magnétique et tension magnétique) ;
- $M_A \gg 1$: l’interaction avec le plasma ambiant domine (transfert d’impulsion).

L’étude se concentre sur le régime super-alfvéniq. Les auteurs dérivent un modèle hybride dans lequel les ions ont une description cinétique (équation de Vlasov) et les électrons sont assimilés à un fluide. Le nuage est modélisé comme une impulsion ponctuelle. Les auteurs obtiennent une expression analytique du potentiel vecteur qui permet d’étudier le transfert d’énergie du nuage au plasma ambiant. Le champ magnétique est comprimé de manière maximale à l’équateur et diminue vers les pôles de la cavité. Nous utiliserons le même modèle pour dériver une expression analytique du champ magnétique dans la section 4.3.

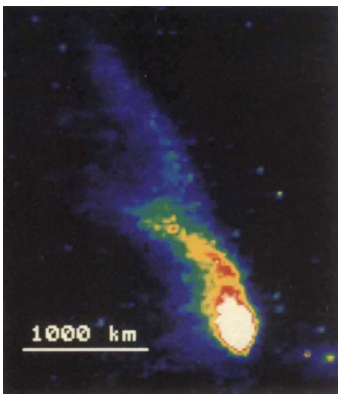


FIGURE 1 – Photographie d’un lâcher de baryum réalisé lors de l’expérience AMPTE [9]

Dans le même temps ont lieu les expériences spatiales fondatrices AMPTE (*Active Magnetospheric Particle Tracer Explorers*). Ces expériences à grande échelle, décrites par [9], visent à simuler les interactions plasma entre le vent solaire et une comète en relâchant des nuages de baryum (choisi pour son fort temps d’ionisation, rendant l’observation possible depuis la Terre, voir la figure 1) dans la magnétosphère terrestre. Elles montrent l’existence de structures diamagnétiques à grande échelle et permettent l’observation directe de cavités diamagnétiques. D’après les observations du phénomène, la cavité diamagnétique formée pendant le lâcher de 1984 a atteint un rayon maximal d’environ 90 kilomètres. À partir des données fournies dans l’article, nous pouvons déterminer le nombre d’Alfvén-Mach de l’expérience. L’expansion se produit dans la magnétosphère terrestre, à une altitude de 17 rayons terrestres. Le champ magnétique qui y règne est d’environ 10 nT, avec une densité d’ions ambiants (de l’hydrogène principalement) de 5 cm^{-3} . La vitesse d’Alfvén du milieu est donc de l’ordre de $100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Compte tenu de la vitesse d’expansion initiale estimée de la cavité (de l’ordre du $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$), l’expérience relève clairement du régime sub-alfvéniq ($M_A \approx 10^{-2}$). C’est donc l’interaction avec le

champ magnétique qui freine l'expansion de la cavité. Les expériences en milieu astrophysique se situent le plus souvent dans ce régime, contrairement aux cavités générées par laser qui relèvent généralement du régime super-alfvénique.

En 1991, de nouveaux lâchers de baryum sont réalisés, cette fois à plus basse altitude (entre 2 et 6 rayons terrestres), lors de la mission CRRES (*Combined Release and Radiation Effects Satellite*). En raison du champ magnétique plus intense régnant à ces altitudes, les rayons maximaux atteints lors de chacun des cinq lâchers réalisés sont plus faibles (de l'ordre de la dizaine de km). Des simulations numériques visant à relier les observations à la théorie MHD sont exposées dans [4]. Deux jeux de simulations 2D sont produits : l'un en MHD idéale et l'autre incluant le terme Hall. Les simulations MHD-Hall permettent de mettre en évidence l'apparition d'instabilités à l'origine de structures spécifiques dans le plasma en expansion. Nous n'étudierons pas les phénomènes de structuration dus au terme Hall, mais notons toutefois que la taille des cavités est réduite par rapport aux résultats en MHD idéale. Dans la section 4.4.1, nous étudions en profondeur le lâcher G10 de cette campagne et comparons les résultats de nos simulations aux données de l'article.

Développement des approches numériques et théoriques À partir des années 2000, des simulations hybrides (ions cinétiques, électrons fluides) de plasmas faiblement collisionnels ont permis d'éclairer le mécanisme d'expansion et le rôle du couplage champ-plasma, en particulier pour le régime super-alfvénique.

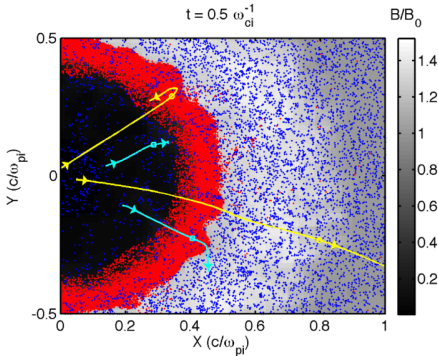


FIGURE 3 – Simulation hybride réalisée par [5] montrant l'évolution de la position des ions débris (en rouge) et ambiants (en bleu) au cours de la croissance de la cavité et l'influence sur le champ magnétique en arrière-plan

Le recours à la simulation peut également guider les expériences de laboratoire. Dans [2], des simulations hybrides 2D sont menées pour identifier les conditions nécessaires à la formation de chocs dans les expériences du LAPD (*LArge Plasma Device*). Plusieurs paramètres sont variés : la vitesse d'expansion initiale des ions débris, la densité du plasma ambiant et le champ magnétique ambiant. Lors de l'expansion des ions débris dans le plasma ambiant, une zone de faible champ se forme (la cavité proprement dite) et elle est entourée d'un

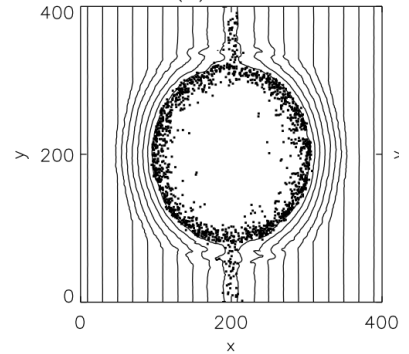


FIGURE 2 – Simulation hybride 2D réalisée par [10] dans laquelle on observe la déformation des lignes de champ par les ions débris en expansion

Ces simulations peuvent être destinées à modéliser des phénomènes astrophysiques, comme dans [10] où l'objectif est de reproduire les phases précoces des explosions de supernovae ou d'éruptions solaires (régimes faiblement collisionnels). Des simulations hybrides 2D (voir par exemple la figure 2) sont réalisées pour évaluer l'impact du rayon de Larmor des ions débris ρ_d sur leur distribution spatiale au cours de l'expansion et leur pénétration dans le champ magnétique ambiant. Les résultats montrent d'abord que la distance d'arrêt des ions débris est cohérente avec le rayon de masse équivalente (voir la section 4.1), ce qui en fait une bonne grandeur caractéristique pour les cavités super-alfvéniques. La distribution spatiale des ions débris dépend fortement du rapport entre le rayon de Larmor des ions débris et celui des ions ambiants : si ce rapport est élevé, les ions débris sont fortement concentrés à l'interface entre le nuage et le champ magnétique. De plus, la distance de pénétration des ions débris dans le champ magnétique augmente linéairement avec ρ_d . Ainsi, pour les explosions astrophysiques de petite échelle, où ρ_d est comparable au rayon de masse équivalente, les effets cinétiques des ions jouent un rôle crucial.

front de champ magnétique comprimé par l'expansion radiale (voir la figure 3). En régime sub-alfvénique, ce front est propagé par l'interaction avec le champ magnétique, à la vitesse d'Alfvén donc. En régime super-alfvénique, la vitesse d'expansion de la cavité est supérieure à la vitesse d'Alfvén. Une condition nécessaire pour l'apparition d'un choc est donc que le nombre d'Alfvén-Mach de l'expérience soit grand. Un deuxième paramètre clé pour la formation de chocs est identifié, qui fait intervenir le rayon de Larmor des ions débris ρ_d et le rayon de masse équivalente R_m . Nous discutons ce paramètre dans la section 7, en utilisant le métamodèle entraîné pour explorer de vastes gammes de paramètres.

En 2023, les conditions de Rankine-Hugoniot nécessaires à la formation des chocs sont dérivées par [3] dans le cas des cavités diamagnétiques. Elles permettent d'établir des relations entre les différents paramètres des expériences. Des simulations PIC (*particle-in-cell*) sont comparées aux équations de saut obtenues et mettent en évidence différents régimes de couplage entre les ions débris et le plasma ambiant.

Études expérimentales en laboratoire Dans les années 2010, de nombreuses expériences sont menées en laboratoire. Elles permettent d'étudier précisément le phénomène des cavités diamagnétiques et la formation de chocs lors de l'expansion d'un plasma dans un champ magnétique.

Les premières expériences de génération de chocs dans un plasma magnétisé sont réalisées par [7] sur le laser Trident. Le dispositif expérimental (voir la figure 4) consiste en l'irradiation d'une cible de graphite par un laser, dans un champ magnétique ambiant. Le laser ionise la cible qui forme un plasma d'ions débris en expansion. Il en résulte la formation d'une cavité diamagnétique entourée d'un front de compression magnétique qui accélère le plasma ambiant. Ces cavités atteignent des rayons de l'ordre de la vingtaine de centimètres. Les expériences sont ensuite reproduites par des simulations hybrides 2D qui permettent de mettre en évidence le couplage avec le plasma ambiant et la formation d'une onde de choc. Puis de nouvelles expériences menées sur le LAPD permettent d'identifier trois régimes de couplage :

- Dans le régime faiblement couplé, le maximum de compression magnétique B_z/B_0 est inférieur au nombre d'Alfvén-Mach $M_A = v_0/v_A$;
- Dans le régime modérément couplé, $B_z/B_0 \sim M_A$ mais la largeur du front de compression magnétique est supérieure à la longueur d'inertie des ions ambiants d_a ;
- Dans le régime fortement couplé, ces deux conditions sont réunies : $B_z/B_0 \sim M_A$ et le front de compression magnétique est plus fin que d_a .

Les auteurs montrent dans [6] qu'un choc ne se forme que dans le régime fortement couplé. Nous étudions en détail le deuxième tir de cet article dans la section 4.4.2. Enfin, de nouveaux tirs laser étudiés dans [8] permettent de dégager cinq critères nécessaires à la formation des chocs, critères que nous discutons dans la section 7.

Avancées récentes Une revue générale des efforts de recherche menés sur le sujet des cavités diamagnétiques est proposée par [11]. Les expériences astrophysiques AMPTE et CRRES et les expériences de laboratoire qui ont suivi y sont décrites. Quelques propriétés des cavités diamagnétiques y sont dérivées, notamment un bilan énergétique que nous approfondissons dans la section 4.2. Enfin, une étude de la formation et la croissance de striations lors de l'évolution de la cavité est menée. Ce phénomène ne peut être expliqué qu'en prenant en compte le terme Hall dans les équations de la MHD. Les résultats donnés par des codes de MHD idéale et de MHD-Hall sont comparés et montrent qu'un meilleur accord avec l'expérience est atteint par le code qui inclut le terme Hall.

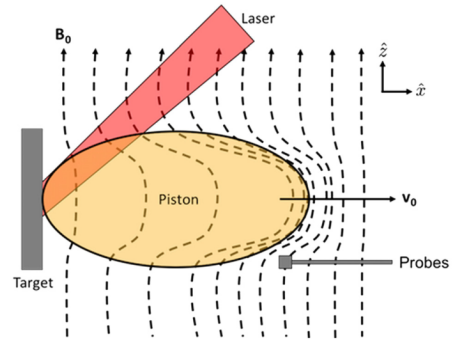


FIGURE 4 – Dispositif expérimental de la génération de cavités diamagnétiques par tir laser [8]

4 Théorie et simulation des cavités diamagnétiques

Cette partie vise d'une part à définir les grandeurs clés permettant de décrire une cavité diamagnétique et quelques modèles pour les estimer, et d'autre part à comparer ces modèles aux résultats des simulations.

4.1 Grandeurs caractéristiques

Le processus de formation d'une zone de faible champ magnétique (la cavité) est dû à un phénomène bien particulier : le gel des lignes de champ. En MHD idéale, le théorème d'Alfvén énonce que les lignes de champ sont gelées dans le plasma, ce qui signifie qu'elles suivent le mouvement fluide du plasma. Autrement dit, lorsque les ions débris entrent en expansion, ils entraînent avec eux les lignes de champ magnétique, ce qui provoque la formation d'une cavité.

La cavité grandit jusqu'à son rayon maximal R_{\max} qu'il nous importe de déterminer. Plusieurs processus peuvent amener la cavité à arrêter de grandir : le transfert d'énergie des ions débris vers le champ magnétique, ou le transfert d'énergie des ions débris vers les ions ambiants. Les différents rayons caractéristiques identifiés sont résumés dans le tableau 1.

Rayon magnétique D'abord, une partie de l'énergie cinétique initiale des ions débris est utilisée pour repousser les lignes de champ. La cavité atteint donc sa taille maximale lorsque toute son énergie initiale a été convertie en énergie magnétique. Elle atteint alors son rayon magnétique $R_{\max} = R_B$, qui se calcule ainsi. L'énergie initiale de la cavité est

$$E(0) = \frac{N_d m_d v_0^2}{2}$$

avec N_d le nombre d'ions débris, chacun de masse m_d et v_0 la vitesse d'expansion initiale de la cavité. Au temps t , elle a transféré une partie de son énergie au champ ambiant :

$$E(t) = \frac{N_d m_d \dot{R}(t)^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{4\pi}{3} R(t)^3$$

La conservation de l'énergie écrite entre l'instant initial et l'instant où la cavité a atteint son rayon magnétique s'écrit :

$$\frac{N_d m_d v_0^2}{2} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{4\pi}{3} R_B^3 \implies R_B = \left(\frac{3\mu_0 N_d m_d v_0^2}{4\pi B_0^2} \right)^{1/3}$$

La principale approximation que nous avons faite ici est de considérer que l'amplitude du champ magnétique, à la frontière de la cavité, vaut B_0 . Or, on assiste en réalité à une compression magnétique de sorte que R_B est une sur-estimation du rayon maximal réel.

Rayon de masse équivalente Le transfert d'énergie thermique des ions débris vers les ions ambiants peut également amener l'expansion de la cavité à s'arrêter. Le rayon de masse équivalente est celui d'une sphère ayant déplacé une masse d'ions ambiants égale à la masse des ions débris. Il est donc défini par la relation

$$N_d m_d = n_{a,0} m_a \frac{4\pi}{3} R_m^3 \implies R_m = \left(\frac{3N_d m_d}{4\pi n_{a,0} m_a} \right)^{1/3}$$

avec $n_{a,0}$ la densité d'ions ambiants de masse m_a .

Notons que le rayon de masse équivalente s'exprime en fonction du rayon magnétique :

$$R_m^3 = \frac{3N_d m_d}{4\pi n_{a,0} m_a} = R_B^3 \frac{B_0^2}{\mu_0 n_{a,0} m_a v_0^2}$$

On reconnaît ici la vitesse d'Alfvén des ions ambiants $v_A = B_0/\sqrt{\mu_0 n_{a,0} m_a}$, de telle sorte qu'en définissant le nombre d'Alfvén-Mach $M_A = v_0/v_A$, on obtient la relation

$$R_B = R_m M_A^{2/3}$$

Ainsi, pour les grands nombres d'Alfvén-Mach (régime super-alfvéenique), le rayon de masse équivalente est plus petit que le rayon magnétique. La décélération de la cavité est donc due au couplage avec le plasma ambiant. À l'inverse en régime sub-alfvéenique, c'est l'interaction avec le champ magnétique qui arrête l'expansion.

Rayon de charge équivalente De manière similaire au rayon de masse équivalente, on peut définir le rayon d'une sphère contenant la même charge portée par les ions ambiants que la charge initiale des ions débris :

$$R_* = \left(\frac{3N_d Z_d}{4\pi n_{a,0} Z_a} \right)^{1/3}$$

avec Z_a le nombre de charges des ions ambiants et Z_d celui des ions débris.

On peut introduire un dernier paramètre, le facteur de magnétisation M :

$$M = \frac{R_*}{R_m} \implies M^3 = \frac{Z_d m_a}{Z_a m_d} = \frac{\rho_a}{\rho_d}$$

avec ρ_a et ρ_d les rayons de Larmor des ions ambiants et des ions débris, respectivement.

Combinaison des deux effets Il est possible de combiner les effets magnétiques et cinétiques qui provoquent le ralentissement de l'expansion de la cavité, en incluant dans l'énergie de la cavité à la fois l'énergie cinétique des ions débris, l'énergie cédée au champ magnétique et l'énergie transférée aux ions ambiants :

$$E(t) = \frac{N_d m_d \dot{R}(t)^2}{2} + \left(\frac{B_0^2}{2\mu_0} + \frac{n_{a,0} m_a v_0^2}{2} \right) \frac{4\pi}{3} R(t)^3$$

Le rayon maximal atteint par la cavité est alors

$$R_{\max} = \left(\frac{3 N_d m_d v_0^2}{4\pi \frac{B_0^2}{\mu_0} + n_{a,0} m_a v_0^2} \right)^{1/3}$$

En manipulant ces expressions, il est possible de faire apparaître la vitesse d'Alfvén dans R_{\max} :

$$R_{\max} = \left(\frac{3N_d m_d}{4\pi n_{a,0} m_a} \frac{v_0^2}{v_0^2 + v_A^2} \right)^{1/3} = R_m \left(\frac{1}{1 + M_A^{-2}} \right)^{1/3}$$

ce qui permet d'identifier les limites attendues

$$R_{\max} \sim \begin{cases} R_m, & M_A \gg 1 \\ R_m M_A^{2/3} = R_B, & M_A \ll 1 \end{cases}$$

Rayon magnétique ($M_A \ll 1$)	$R_B = \left(\frac{3\mu_0 N_d m_d v_0^2}{4\pi B_0^2} \right)^{1/3}$
Rayon de masse équivalente ($M_A \gg 1$)	$R_m = \left(\frac{3N_d m_d}{4\pi n_{a,0} m_a} \right)^{1/3}$
Rayon de charge équivalente	$R_* = \left(\frac{3N_d Z_d}{4\pi n_{a,0} Z_a} \right)^{1/3}$
Cas général	$R_{\max} = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{N_d m_d v_0^2}{\frac{B_0^2}{\mu_0} + n_{a,0} m_a v_0^2} \right)^{1/3}$

TABLE 1 – Rayons caractéristiques en fonction du régime alfvénique

On peut comparer les rayons magnétique, de masse équivalente et de charge équivalente au rayon maximal théorique R_{\max} :

- $\frac{R_B}{R_{\max}} = (1 + M_A^2)^{1/3}$;
- $\frac{R_m}{R_{\max}} = (1 + M_A^{-2})^{1/3}$;
- $\frac{R_*}{R_{\max}} = M (1 + M_A^{-2})^{1/3}$

avec M le paramètre de magnétisation ($M^3 = Z_d m_a / (Z_a m_d)$). Dans la figure 5, on constate que le rayon magnétique et le rayon de masse équivalente surestiment toujours le rayon théorique maximal, ce qui est cohérent puisque que ces rayons négligent soit les effets magnétiques, soit les effets impulsionnels. L'écart est particulièrement important en régime trans-alfvénique, lorsqu'aucun de ces deux régimes ne domine. Par contre, pour $M_A \ll 1$ ou $M_A \gg 1$, le rayon magnétique et le rayon de masse équivalente respectivement, constituent une bonne approximation.

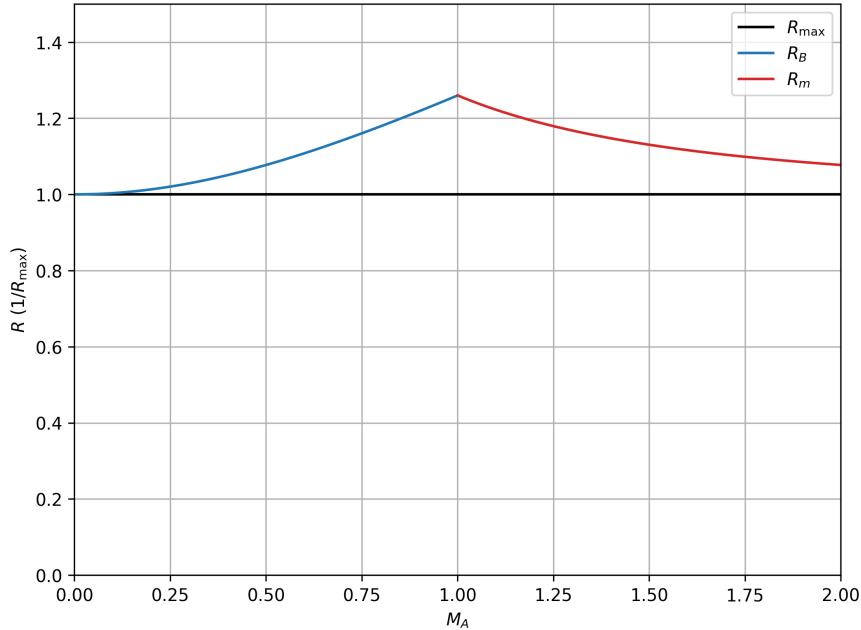


FIGURE 5 – Rayon magnétique, rayon de masse équivalente et rayon maximal en fonction du nombre d'Alfvén-Mach (en unités de R_{\max})

Quant au rayon de charge équivalente, la discussion dépend des espèces considérées. En effet, le paramètre de magnétisation, qui dépend des charges et masses des ions du système, intervient dans la comparaison entre R_* et R_{\max} . Nous présentons dans la figure 6 la comparaison pour différentes valeurs de M :

- Dans le premier cas, nous prenons $M^3 = 1/2$, valeur atteinte par exemple pour un système d'ions débris C^{6+} s'expandant dans un plasma d'hydrogène. Cette configuration est intéressante car le rayon de charge équivalente devient particulièrement pertinent autour de $M_A = 1$, en régime trans-alfvénique.
- Lorsque nous réduisons l'ionisation des ions débris (C^{4+} puis C^+) le paramètre de magnétisation diminue et l'intersection entre R_* et R_{\max} intervient pour des M_A plus faibles.
- Enfin, le dernier cas présente l'expansion d'ions débris C^{6+} dans un plasma d'hélium He^+ , système pour lequel $M^3 = 2$. Le rayon de charge équivalente surestime alors le rayon maximal théorique, surtout pour les faibles M_A .

Il ressort de cette discussion que le rayon de charge équivalente n'est pas un très bon indicateur du rayon atteint par la cavité. De plus, le code de simulation que nous utiliserons par la suite ne prend pas en compte les degrés d'ionisation des espèces considérées ce qui réduit encore la pertinence de ce rayon. Toutefois, pour sa précision en régime trans-alfvénique lorsque $M^3 = 1/2$ et parce que le paramètre R_* entre dans la caractérisation des chocs (voir [2],[6],[8]), nous travaillerons dans la suite avec des ions débris C^{6+} et des ions ambiants H^+ .

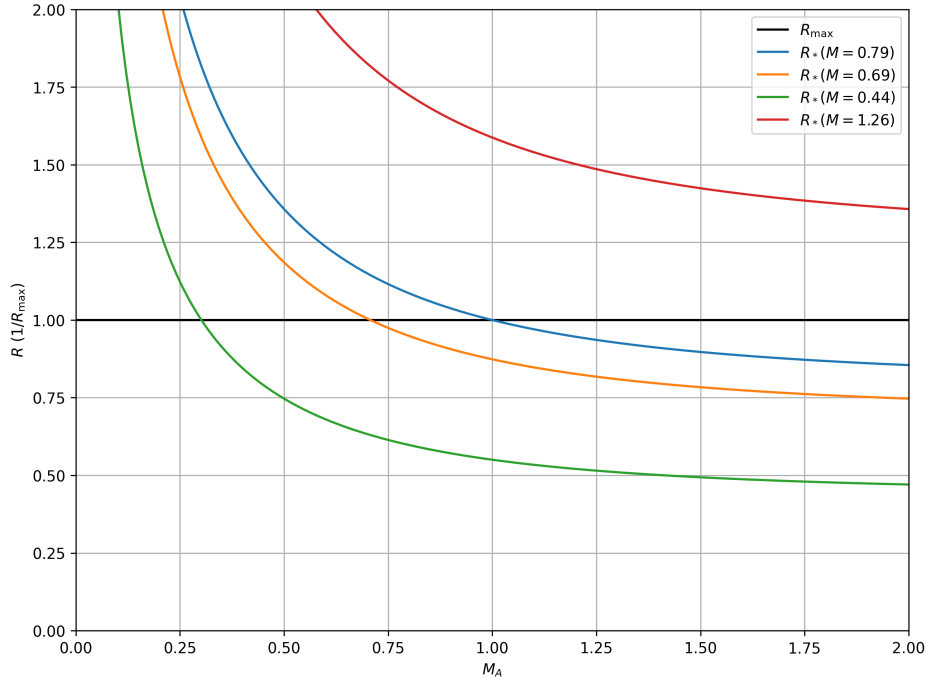


FIGURE 6 – Rayon de charge équivalente et rayon maximal en fonction du nombre d'Alfvén-Mach (en unités de R_{\max}), pour différents paramètres de magnétisation

4.2 Bilan énergétique

Il est intéressant d'écrire l'équation de conservation de l'énergie de la cavité. Au temps t , l'énergie de la cavité s'écrit

$$E(t) = \frac{m_d N_d \dot{R}(t)^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{4\pi}{3} R(t)^3 + \frac{m_a n_{a,0} v_0^2}{2} \frac{4\pi}{3} R^3(t)$$

Le premier terme est l'énergie cinétique des ions débris ; le second est l'énergie magnétique transmise au champ ambiant ; le troisième est l'énergie cinétique transmise par impulsion aux ions ambiants. On a fait plusieurs approximations dans cette expression :

- On considère une expansion parfaitement sphérique ;
- Tous les ions débris possèdent la même vitesse $\dot{R}(t)$;
- Le champ magnétique à la frontière de la cavité est fixé à B_0 , alors qu'un front magnétique intense se forme autour de la cavité ;
- Tous les ions ambiants sont accélérés à v_0 ;
- On ne prend pas en compte les instabilités qui se forment autour de la cavité, comme on peut le voir sur les simulations de la section 4.4.

Toutefois, cette expression va nous permettre d'obtenir des ordres de grandeur (et en fait des majorants) pour le rayon maximal de la cavité et pour son temps d'expansion.

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit

$$\dot{E}(t) = 0 \implies \ddot{R}(t) + 2\pi \frac{\frac{E_0^2}{\mu_0} + n_{a,0} m_a v_0^2}{N_d m_d} R^2(t) = 0$$

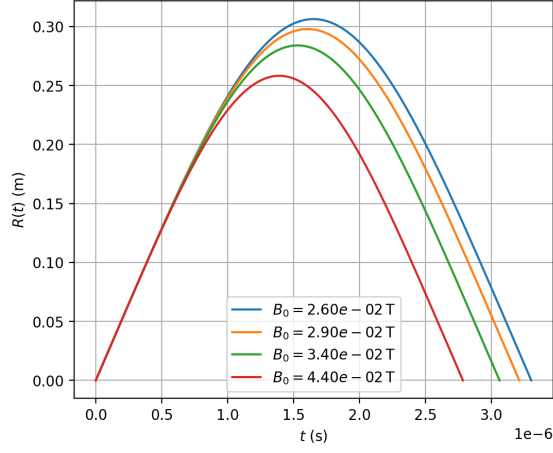
La solution analytique de cette équation différentielle fait intervenir la fonction bêta incomplète \mathcal{B} . Nous commençons par donner l'instant t_{\max} auquel le rayon maximal R_{\max} est atteint :

$$t_{\max} = \frac{R_{\max}}{3v_0} \mathcal{B} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right).$$

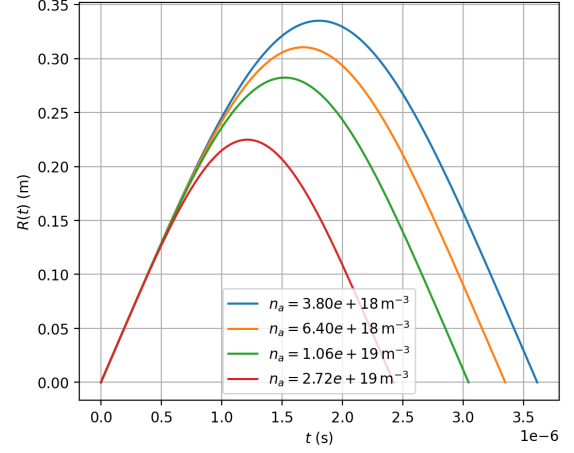
La trajectoire complète s'écrit

$$R(t) = \begin{cases} R_{\max} \left(\mathcal{B}^{-1} \left(\frac{3v_0}{R_{\max}} t; \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) \right)^{1/3}, & 0 < t < t_{\max} \\ R_{\max} \left(\mathcal{B}^{-1} \left(\frac{3v_0}{R_{\max}} (2t_{\max} - t); \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) \right)^{1/3}, & t_{\max} < t < 2t_{\max} \end{cases}$$

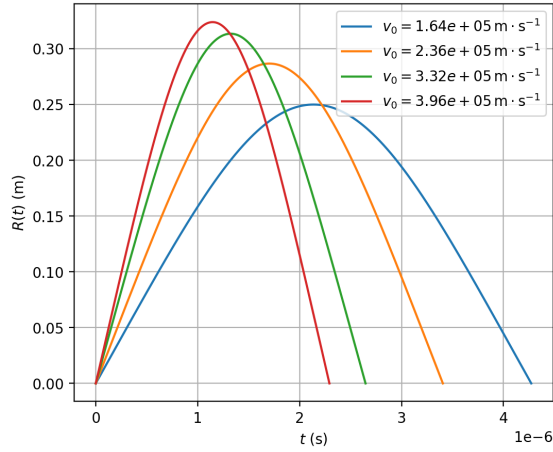
La figure 7 permet d'évaluer l'impact individuel de chacune des grandeurs décrivant le plasma et la cavité sur la trajectoire $R(t)$. D'une part, l'augmentation de l'amplitude du champ ambiant ou de la densité d'ions ambiants a pour conséquence la réduction du rayon maximal de la cavité. En effet, dans le premier cas la force de Laplace sera plus intense et dans le second cas les transferts impulsions entre les ions débris et les ions ambiants seront plus importants. À l'inverse, l'augmentation de la vitesse d'expansion initiale ou du nombre d'ions débris conduit à l'augmentation du rayon maximal de la cavité. Il est toutefois important de souligner que l'augmentation de la vitesse d'expansion initiale a une conséquence particulière, puisqu'en même temps qu'elle entraîne l'augmentation du rayon maximal, elle diminue le temps d'expansion : une cavité plus grande, mais de plus courte durée de vie, se formera.



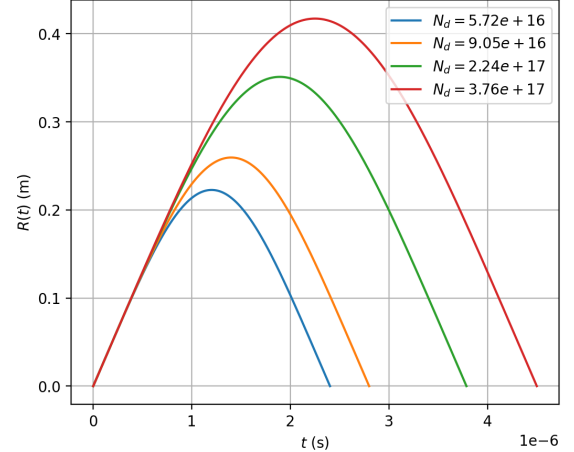
(a) Variation de B_0 ($n_{a,0} = 8.50 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$, $v_0 = 2.60 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $N_d = 1.33 \times 10^{17}$)



(b) Variation de $n_{a,0}$ ($B_0 = 3.00 \times 10^{-2} \text{ T}$, $v_0 = 2.60 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $N_d = 1.33 \times 10^{17}$)



(c) Variation de v_0 ($B_0 = 3.00 \times 10^{-2} \text{ T}$, $n_{a,0} = 8.50 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$, $N_d = 1.33 \times 10^{17}$)



(d) Variation de N_d ($B_0 = 3.00 \times 10^{-2} \text{ T}$, $n_{a,0} = 8.50 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$, $v_0 = 2.60 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$)

FIGURE 7 – Évolution du rayon obtenu par bilan énergétique en fonction des paramètres physiques du phénomène

4.3 Dérivation d'un modèle analytique

Les considérations énergétiques vues précédemment nous permettent d'obtenir un ordre de grandeur de R_{max} et de t_{max} , et d'avoir une estimation de l'évolution du rayon de la cavité au cours du temps. Mais il serait utile d'avoir également une idée de l'évolution du champ magnétique. Nous nous basons pour cela sur un modèle hybride de plasma non-collisionnel initialement décrit par [1], valable pour les cavités super-alfvéniennes. Une grande partie de la dérivation présentée dans cette section peut être retrouvée dans l'article. Nous considérons un plasma en expansion, composé d'électrons et d'ions débris, dans un plasma et un champ magnétique ambiants.

Comme nous l'avons vu, deux processus distincts peuvent conduire à la décélération de la cavité : l'interaction avec le champ magnétique ambiant \mathbf{B}_0 ou l'interaction avec le plasma ambiant. À chacun de ces processus correspond un rayon maximal atteint par la cavité avant d'imploser : le rayon magnétique et le rayon de masse équivalente. Le processus en cause dépend du nombre d'Alfvén-Mach du phénomène. Pour

les grands nombres d'Alfvén-Mach, le rayon de masse équivalente est plus petit que le rayon magnétique. La décélération de la cavité est donc due à l'interaction avec le plasma ambiant. C'est dans ce cadre ($M_A \gg 1$) que nous nous plaçons.

Modèle Nous considérons un modèle hybride dans lequel la dynamique des ions obéit à l'équation de Vlasov

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_i + \frac{q_i}{m_i} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_i = 0$$

tandis que les électrons sont décrits de manière fluide :

$$\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Introduisons les grandeurs fluides, premiers moments des fonctions de distribution des ions, qui nous seront utiles dans la suite :

$$n_i = \int_{\mathbb{R}^3} f_i d^3 \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}_i = \frac{1}{n_i} \int_{\mathbb{R}^3} f_i \mathbf{v} d^3 \mathbf{v}$$

La condition de quasi-neutralité du plasma s'écrit

$$en_e = \sum_i q_i n_i$$

Rappelons les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère qui régissent l'évolution spatio-temporelle du champ électromagnétique :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Dans l'approximation non-relativiste, le dernier terme de l'équation de Maxwell-Ampère est négligeable. Nous aurons donc simplement $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$.

Le courant \mathbf{j} est défini par

$$\mathbf{j} = \sum_i q_i n_i \mathbf{u}_i - en_e \mathbf{u}_e$$

et peut donc être simplifié, par la condition de quasi-neutralité, en

$$\mathbf{j} = \sum_i q_i n_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$$

Enfin, nous choisissons des conditions initiales décrivant l'expansion du plasma débris dans le plasma ambiant initialement au repos :

$$\begin{cases} f_d(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t = 0) = N_d \delta(\mathbf{r}) \psi(v) \\ f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t = 0) = n_{a,0} \delta(\mathbf{v}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t = 0) = \mathbf{B}_0 \end{cases}$$

avec $\int_{\mathbb{R}^3} \psi(v) d^3 \mathbf{v} = 1$.

Dynamique Établissons maintenant l'équation d'évolution du champ magnétique :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{u}_e \times \mathbf{B})$$

Nous pouvons utiliser la condition de quasi-neutralité :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\frac{1}{en_e} \left(\sum_i q_i n_i \mathbf{u}_i - \mathbf{j} \right) \times \mathbf{B} \right) = \nabla \times \left(\frac{1}{en_e} \left(\sum_i q_i n_i \mathbf{u}_i - \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right) \times \mathbf{B} \right)$$

Introduisons le potentiel vecteur $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. On a bien sûr $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, d'où

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{en_e} \left(\sum_i q_i n_i \mathbf{u}_i - \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right) \times \mathbf{B} = \frac{1}{en_e} \left(\sum_i q_i n_i \mathbf{u}_i - \frac{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})}{\mu_0} \right) \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

En considérant une échelle spatiale du problème de l'ordre de R_m , le quotient de $\sum_i q_i n_i \mathbf{u}_i$ par $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) / \mu_0$ est de l'ordre de M_A^2 -ce second terme peut donc être négligé, puisque nous considérons $M_A \gg 1$. L'équation d'évolution du potentiel vecteur se réduit donc à

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{en_e} \sum_i q_i n_i \mathbf{u}_i \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

Si on néglige les effets du champ électromagnétique sur le mouvement des ions, les fonctions de distribution sont solution d'une équation de transport et sont donc données à l'instant t par

$$\begin{cases} f_d(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = N_d \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \psi\left(\frac{r}{t}\right) \\ f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n_{a,0} \delta(\mathbf{v}) \end{cases}$$

Nous pouvons donc calculer les grandeurs fluides d'intérêt à tout instant :

— Ions débris :

$$\begin{aligned} n_d(\mathbf{r}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} N_d \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \psi\left(\frac{r}{t}\right) d^3\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^3} N_d \delta(\mathbf{r} - \mathbf{u}) \psi\left(\frac{r}{t}\right) t^{-3} d^3\mathbf{u} = N_d t^{-3} \psi\left(\frac{r}{t}\right) \\ \mathbf{u}_d(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{n_d(\mathbf{r}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} N_d \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \psi\left(\frac{r}{t}\right) \mathbf{v} d^3\mathbf{v} = \frac{1}{N_d t^{-3} \psi\left(\frac{r}{t}\right)} \int_{\mathbb{R}^3} N_d \delta(\mathbf{r} - \mathbf{w}) \psi\left(\frac{r}{t}\right) t^{-3} \frac{\mathbf{w}}{t} d^3\mathbf{w} = \frac{\mathbf{r}}{t} \end{aligned}$$

— Ions ambiants :

$$\begin{aligned} n_a(\mathbf{r}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} n_{a,0} \delta(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} = n_{a,0} \\ \mathbf{u}_a(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{n_a(\mathbf{r}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} n_{a,0} \delta(\mathbf{v}) \mathbf{v} d^3\mathbf{v} = \frac{1}{n_{a,0}} \int_{\mathbb{R}^3} n_{a,0} \delta(\mathbf{v}) \mathbf{v} d^3\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

En injectant les expressions obtenues dans l'équation d'évolution du potentiel vecteur, nous obtenons :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{q_d N_d}{en_e} \psi\left(\frac{r}{t}\right) \frac{\mathbf{r}}{t^4} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

Comme le problème est à symétrie sphérique, le potentiel vecteur s'écrit $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A_\phi(r, \theta, t) \mathbf{e}_\phi$ où $A_\phi(r, \theta, t) = A(r, t) \sin(\theta)$. Ainsi,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) A_\phi) \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \mathbf{e}_\theta$$

et

$$\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \mathbf{e}_\phi$$

Finalement,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{q_d N_d}{q_a n_a + q_d n_d} \psi\left(\frac{r}{t}\right) \frac{1}{t^4} \frac{\partial(r A)}{\partial r} = 0$$

En réutilisant les expressions de n_d et n_a , on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante pour A :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\frac{q_d}{q_a} \frac{N_d}{n_{a,0}} \psi\left(\frac{r}{t}\right) \frac{r}{t^4}}{1 + \frac{q_d}{q_a} \frac{N_d}{n_{a,0}} \psi\left(\frac{r}{t}\right) \frac{1}{t^3} r} \frac{1}{r} \frac{\partial(r A)}{\partial r} = 0$$

La solution de cette équation de transport satisfaisant la condition aux limites $A \sim B_0 r/2$ lorsque $r \rightarrow +\infty$ est

$$A(r, t) = \begin{cases} 0, & r \in [0, R(t)[\\ \frac{B_0 R_*^2}{2r} \left(\left(\frac{r}{R_*} \right)^3 + 4\pi \int_0^{r/t} \psi(v) v^2 dv - 1 \right)^{2/3}, & r \in]R(t), +\infty[\end{cases}$$

où R_* est le rayon de charge équivalente et R est solution de l'équation implicite

$$\left(\frac{R(t)}{R_*} \right)^3 + 4\pi \int_0^{R(t)/t} \psi(v) v^2 dv - 1 = 0$$

Application Considérons

$$\psi(v) = \frac{3}{4\pi v_0^3} \theta(v_0 - v)$$

où v_0 est la vitesse maximale d'expansion des ions débris et θ est la fonction d'Heavyside. Utilisons cette expression de ψ pour calculer le rayon de la cavité $R(t)$ en fonction du temps :

$$\left(\frac{R(t)}{R_*} \right)^3 + \frac{\min\left(v_0, \frac{R(t)}{t}\right)^3}{v_0^3} - 1 = 0$$

Or, v_0 étant la vitesse maximale d'expansion des ions débris, on aura toujours $R(t)/t \leq v_0$. Ainsi,

$$\left(\frac{R(t)}{R_*} \right)^3 + \left(\frac{R(t)}{v_0 t} \right)^3 - 1 = 0$$

On en déduit que le rayon de la cavité s'exprime en fonction du rayon de charge équivalente et de la vitesse maximale d'expansion des ions débris sous la forme suivante :

$$R(t) = \left(\frac{R_*^3 (v_0 t)^3}{R_*^3 + (v_0 t)^3} \right)^{1/3}$$

Nous savons que le potentiel vecteur est nul à l'intérieur de la cavité. En-dehors, nous pouvons utiliser la même méthode pour déterminer son expression. Prenons $r \in [R(t), +\infty[$. Notons d'abord que

$$\int_0^{r/t} \psi(v) v^2 dv = \frac{1}{4\pi v_0^3} \min\left(v_0, \frac{r}{t}\right)^3$$

Pour $r \in [R(t), v_0 t[$,

$$A(r, t) = \frac{B_0 R_*^2}{2r} \left(\left(\frac{r}{R_*} \right)^3 + \left(\frac{r}{v_0 t} \right)^3 - 1 \right)^{2/3} = \frac{B_0 R_*^2 r}{2} \left(\frac{1}{R_*^3} + \frac{1}{(v_0 t)^3} - \frac{1}{r^3} \right)^{2/3} = \frac{B_0 R_*^2 r}{2} \left(\frac{1}{R(t)^3} - \frac{1}{r^3} \right)^{2/3}$$

Pour $r \in [v_0 t, +\infty[$,

$$A(r, t) = \frac{B_0 R_*^2}{2r} \left(\left(\frac{r}{R_*} \right)^3 + 1 - 1 \right)^{2/3} = \frac{B_0 R_*^2}{2r} \left(\frac{r}{R_*} \right)^2 = \frac{B_0 r}{2}$$

Enfin, en prenant le rotationnel de $\mathbf{A} = A_\phi \mathbf{e}_\phi$, nous obtenons l'expression du champ magnétique à l'extérieur de la cavité (il est nul à l'intérieur) :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = B_r(r, \theta, t) \mathbf{e}_r + B_\theta(r, \theta, t) \mathbf{e}_\theta$$

avec

$$B_r(r, \theta, t) = \begin{cases} \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) A_\phi) = 2 \frac{A(r, t)}{r} \cos(\theta) = B_0 R_*^2 \left(\frac{1}{R(t)^3} - \frac{1}{r^3} \right)^{2/3} \cos(\theta), & r \in [R(t), v_0 t[\\ B_0 \cos(\theta), & r \in [v_0 t, +\infty[\end{cases}$$

et

$$B_\theta(r, \theta, t) = \begin{cases} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = -\frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A(r, t)) = -\frac{B_0 R_*^2}{R(t)^3} \left(\frac{1}{R(t)^3} - \frac{1}{r^3} \right)^{-1/3} \sin(\theta), & r \in [R(t), v_0 t[\\ -B_0 \sin(\theta), & r \in [v_0 t, +\infty[\end{cases}$$

On obtient, finalement, la composante du champ selon z (par $B_z = \cos(\theta)B_r - \sin(\theta)B_\theta$) :

$$B_z(r, \theta, t) = \begin{cases} 0, & r \in [0, R(t)] \\ B_0 R_*^2 \left(\frac{1}{R(t)^3} - \frac{1}{r^3} \right)^{-1/3} \left(\left(\frac{1}{R(t)^3} - \frac{1}{r^3} \right) \cos^2(\theta) + \frac{1}{R(t)^3} \sin^2(\theta) \right), & r \in]R(t), v_0 t[\\ B_0, & r \in [v_0 t, +\infty[\end{cases}$$

Ce modèle, bien qu'assez basique, permet de rendre compte d'un certain nombre d'effets observés grâce aux simulations ou lors d'expériences. On observe en effet trois zones magnétiques :

- La cavité, caractérisée par une zone de champ nul (ce qui est une approximation de notre modèle) pour les rayons inférieurs à R ;
- Une zone de compression magnétique, dans laquelle le champ est très intense, particulièrement à la frontière avec la cavité où il tend vers $+\infty$ (c'est là encore une imperfection de notre modèle) ;
- La zone de champ ambiant, où $B_z = B_0$, séparée de la zone de compression par un choc magnétique que l'on retrouve dans les simulations.

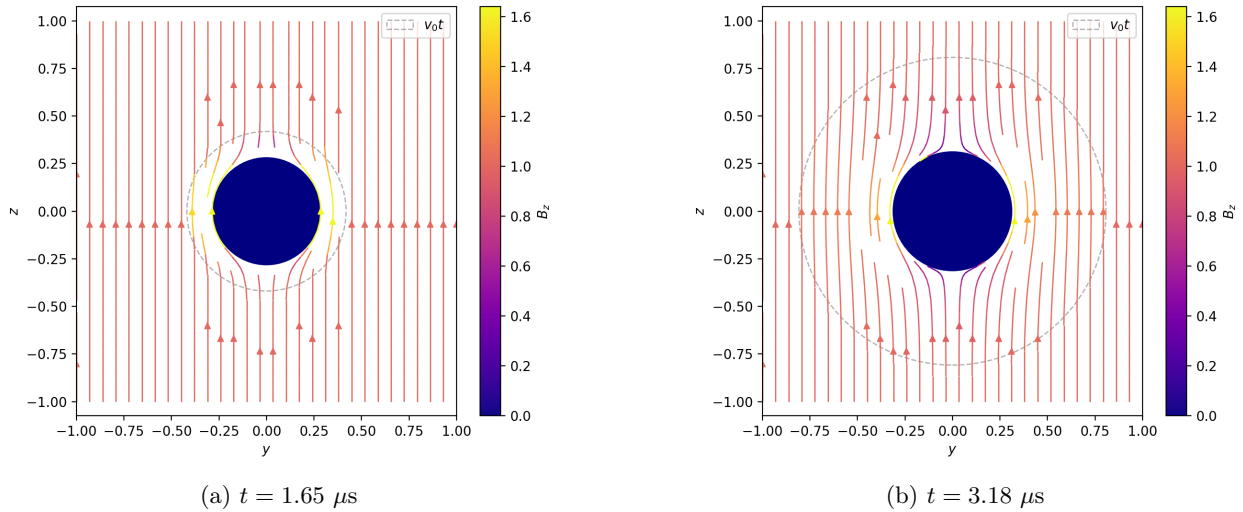
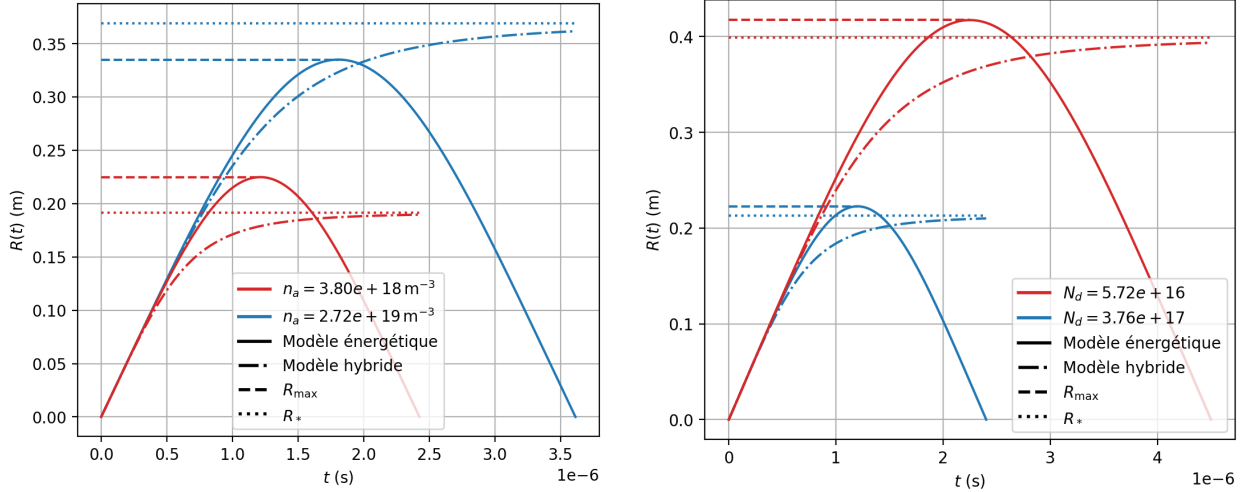


FIGURE 8 – Lignes de champ magnétique dans le plan (y, z) obtenues par le modèle hybride (en unités de B_0)

Dans la figure 8, on voit que le modèle rend bien compte de la déformation des lignes de champ magnétique, résultant de l'expansion du nuage d'ions débris et du théorème du champ gelé. La frontière entre la cavité et la zone de compression magnétique correspond au rayon de la cavité R . On a $R(t) \approx v_0 t$ quand $t \ll 1$, ce qui

est cohérent avec une vitesse d'expansion initiale égale à v_0 . Le rayon sature au rayon de charge équivalente R_* . La frontière entre la zone de compression magnétique et la zone de champ ambiant évolue quant à elle à la vitesse v_0 tout au long de l'expérience, ce qui est une limite de notre modèle car les simulations montrent un ralentissement du front avant du choc magnétique au cours du temps. Enfin, ce modèle ne permet de capturer que la phase d'expansion de la cavité, puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = R_*$ et ne permet donc pas d'étudier la phase d'implosion.



(a) Variation de $n_{a,0}$ ($B_0 = 3.00 \times 10^{-2} \text{T}$, $v_0 = 2.60 \times 10^5 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $N_d = 1.33 \times 10^{17}$) (b) Variation de N_d ($B_0 = 3.00 \times 10^{-2} \text{T}$, $n_{a,0} = 8.50 \times 10^{18} \text{m}^{-3}$, $v_0 = 2.60 \times 10^5 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

FIGURE 9 – Comparaison entre le rayon estimé énergétiquement et celui donné par le modèle hybride, en fonction des paramètres physiques du phénomène

On compare dans la figure 9 la solution déjà présentée issue de considérations énergétiques à la solution donnée par le modèle hybride. On présente seulement l'impact de la variation de deux grandeurs ($n_{a,0}$ et N_d) car la modification des autres grandeurs ne change pas la trajectoire donnée par le modèle hybride. L'accord entre les deux approches est particulièrement marqué pendant le début de la phase d'expansion (les deux modèles donnent une expansion initiale à la vitesse v_0). Le rayon maximal donné par le modèle hybride est le rayon de charge équivalente et diffère en général du rayon R_{\max} donné par le modèle énergétique. On renvoie à la discussion portant sur la comparaison entre R_* et R_{\max} en fonction du nombre d'Alfvén-Mach. Notons que le modèle hybride, valable seulement pour des cavités super-alfvéniqes, donnera toujours un rayon maximal inférieur à R_{\max} . La cavité étudiée dans la figure ci-dessus avec $n_{a,0} = 2.72 \times 10^{19} \text{m}^{-3}$ est sub-alfvéniqes, le modèle hybride ne peut donc pas y être appliqué.

4.4 Comparaison avec les simulations

Dans cette section, nous comparons les résultats théoriques décrits précédemment aux simulations. Nous décrivons précisément deux cas issus de la littérature : une cavité sub-alfvéniqes ($M_A = 0.1$, [4]) et une cavité super-alfvéniqes ($M_A = 1.3$, [6]).

Nous utilisons le code de simulation Kalypso, développé en interne, qui est un code MHD idéale mono-fluide. Le code bénéficie de plusieurs caractéristiques intéressantes par rapport aux codes précédents : sa comptabilité avec une utilisation en GPU ; l'AMR (*adaptive mesh refinement*) qui permet de plus ou moins raffiner la résolution en privilégiant les cellules d'intérêt ; sa capacité à générer des simulations 2D. Ces caractéristiques réduisent fortement le temps de calcul et permettent d'envisager la génération d'une base de données de simulation.

Bien que le code puisse générer des simulations en deux dimensions, il ne s’agit pas de cavités 2D au sens d’une population d’ions qui s’expandrait dans un disque. Le code simule des cavités physiques s’expandant de manière sphérique mais peut renvoyer les résultats dans un plan ce qui réduit le temps de calcul, tout en simulant des phénomènes réalistes.

4.4.1 Régime sub-alfvénique

Le régime sub-alfvénique est principalement atteint dans les régimes astrophysiques. C’est pourquoi nous nous intéressons ici à la simulation d’un des lâchers de baryum CRRES. Plus précisément, nous simulons le lâcher G10, dont nous rappelons dans le tableau 2 les principaux paramètres. Ce lâcher est décrit et simulé dans [4]. Les auteurs utilisent des grandeurs différentes des paramètres physiques pour la simulation, elles sont également rappelées.

La simulation 2D utilisée dans [4] pour décrire le lâcher G10 a un nombre d’Alfvén-Mach $M_A = 0.1$, ce qui nous place clairement en régime sub-alfvénique. Dans l’article, la simulation est réalisée avec des ions débris Ba^+ (nombre de masse 138) dans un plasma d’ions ambiants H^+ , à des échelles de l’ordre de la centaine de kilomètres. Comme nous travaillerons avec des ions débris C^{6+} et sur un domaine de simulation d’un mètre de côté, nous adimensionnons les paramètres à l’aide de la procédure décrite dans la section 5.1 pour nous ramener à notre cadre de simulation.

Paramètres physiques ([4])						
L (m)	B_0 (T)	$n_{a,0}$ (m^{-3})	v_0 ($m \cdot s^{-1}$)	N_d	R_{\max} (m)	t_{\max} (s)
1.00e+05	1.35e-07	1.00e+06	1.21e+03	1.84e+25	4.68e+04	5.42e+01
Paramètres de simulation 2D ([4])						
L (m)	B_0 (T)	$n_{a,0}$ (m^{-3})	v_0 ($m \cdot s^{-1}$)	N_d	R_{\max} (m)	t_{\max} (s)
1.00e+05	1.35e-07	4.40e+08	1.40e+04	2.96e+18	5.41e+04	1.21e+01
Paramètres adimensionnels						
	ρ_a/L	d_a/L	M_A	ρ_a/R_*		
	2.32e+02	1.09e-01	1.00e-01	5.01e+02		
Paramètres de simulation retenus						
L (m)	B_0 (T)	$n_{a,0}$ (m^{-3})	v_0 ($m \cdot s^{-1}$)	N_d	R_{\max} (m)	t_{\max} (s)
1.00e+00	1.35e-02	4.40e+18	1.40e+04	3.05e+17	1.25e-01	1.25e-05

TABLE 2 – Paramètres de simulation pour une cavité sub-alfvénique

Nous faisons démarrer la simulation à un temps t_0 défini comme l’instant auquel la cavité, s’étant expandue à une vitesse v_0 , aura atteint le rayon r_0 :

$$t_0 = \frac{r_0}{v_0}.$$

Cela permet d’initialiser le code avec une cavité de rayon non-nul. Nous choisissons $r_0 = 2$ cm, ce qui donne $t_0 \approx 1.42 \mu s$.

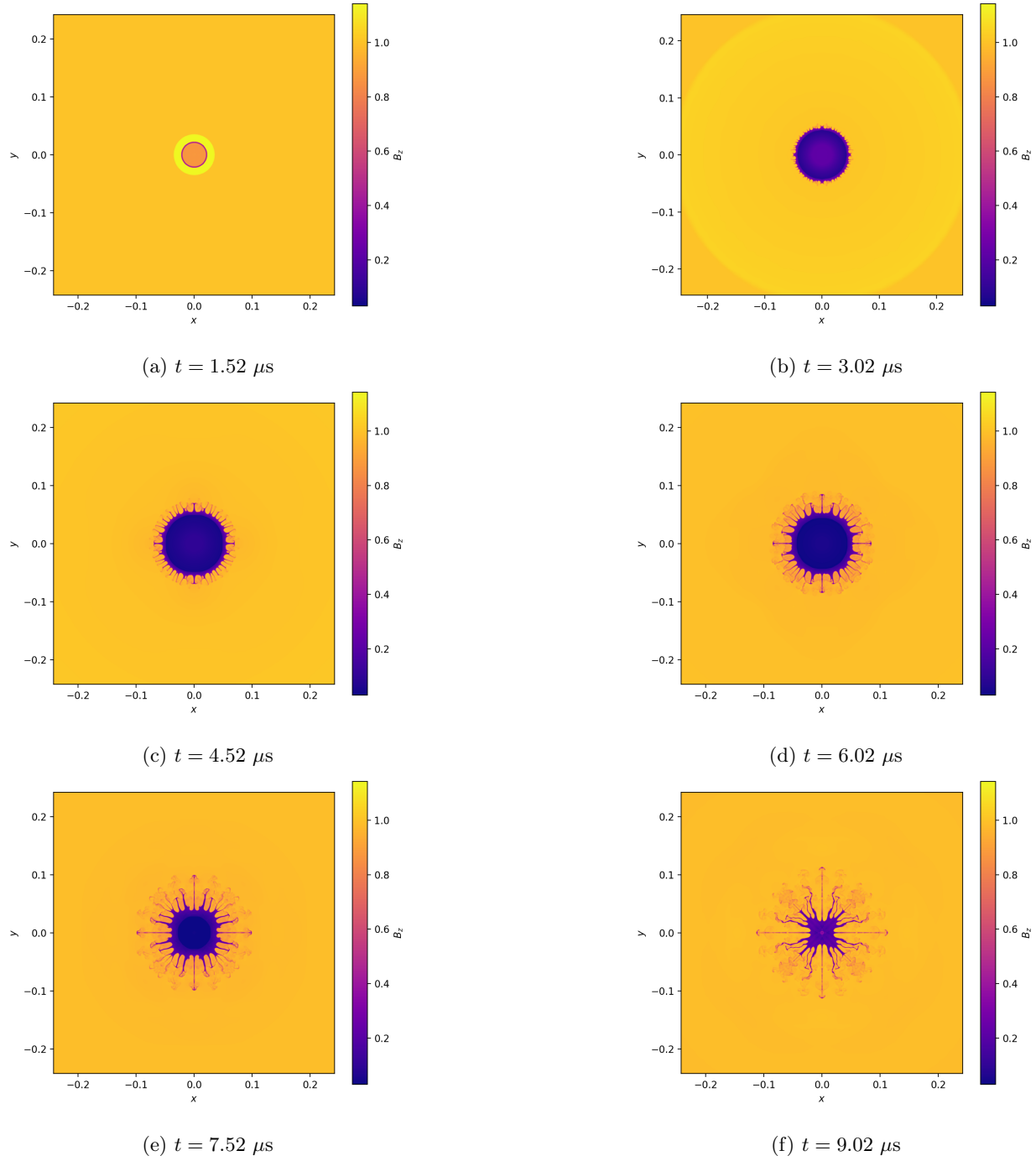


FIGURE 10 – Champ magnétique vertical dans le plan (x, y) obtenu par simulation (en unités de B_0)

La figure 10 présente l'amplitude du champ magnétique vertical dans le plan (x, y) à différents instants de la simulation. Au début de la simulation, la cavité est initialisée avec un rayon r_0 . Rapidement, une zone de très faible champ magnétique apparaît en son centre. La cavité grandit, entourée d'un front de compression magnétique qui évolue rapidement. Aux alentours de $t = 4.5 \mu s$, la cavité a atteint son rayon maximal. Des instabilités se forment sur son contour, ce qui provoque la phase d'implosion. La force de Laplace s'exerçant

autour de la cavité a épuisé toute l'énergie cinétique initiale des ions débris. Tout au long de l'évolution de la cavité, on constate une symétrie par rotation autour de l'axe z (aux instabilités près), ce qui permettra dans la suite de moyenner le champ magnétique radialement.

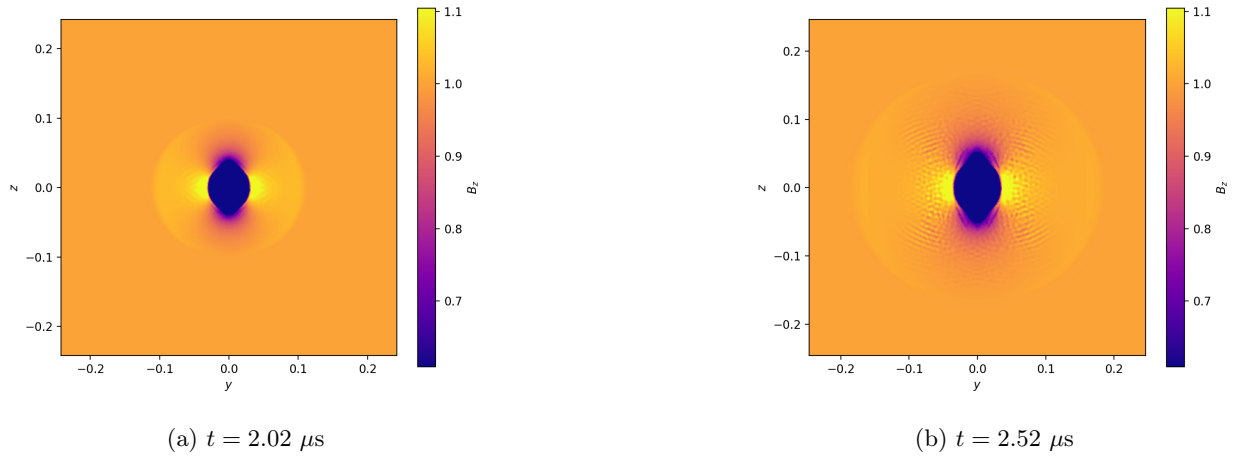


FIGURE 11 – Champ magnétique vertical dans le plan (y, z) obtenu par simulation (en unités de B_0)

Dans le plan (y, z) (figure 11), on observe de même la formation d'une zone de faible champ entourée d'un front de compression magnétique s'expandant rapidement. Toutefois, la symétrie est brisée : au cours de son évolution, la symétrie s'allonge le long de l'axe z . En effet, les lignes de champ, initialement alignées avec z , conduisent à cette forme oblongue. On peut remarquer que la compression magnétique ne se produit qu'autour du plan $z = 0$, ce qui est cohérent avec l'expression de la force de Laplace qui est maximale là où le rayon de courbure des lignes de champ est important.

Cette figure et la suivante ont nécessité une simulation 3D et c'est pourquoi on ne présente que les premiers instants de l'évolution du phénomène.

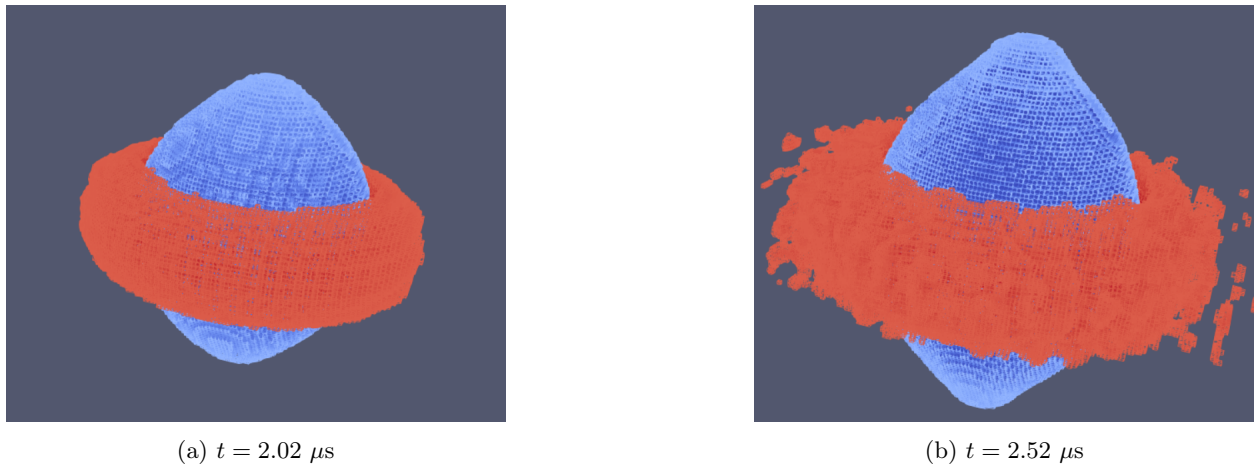
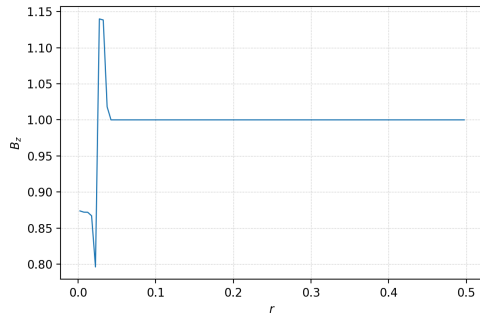


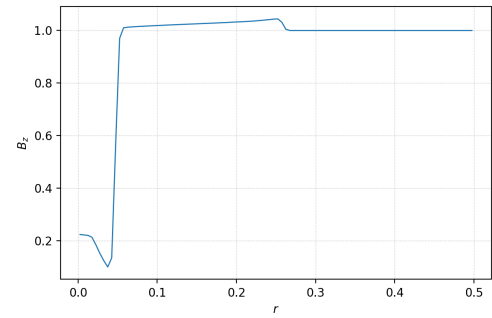
FIGURE 12 – Champ magnétique vertical obtenu par simulation

La figure 12 représente une visualisation en 3D de la cavité, dans laquelle on a filtré les zones de très faible et très fort champ, permet de mettre en évidence un noyau où le champ est presque nul et un front magnétique qui l'entoure, dans lequel le champ est très important. On retrouve la forme oblongue observée

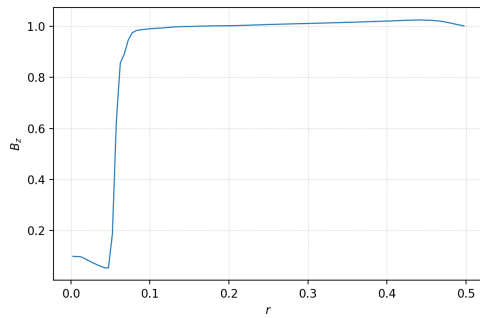
dans le plan (y, z) et on constate à nouveau que la compression magnétique ne se fait qu'autour des $|z|$ faibles.



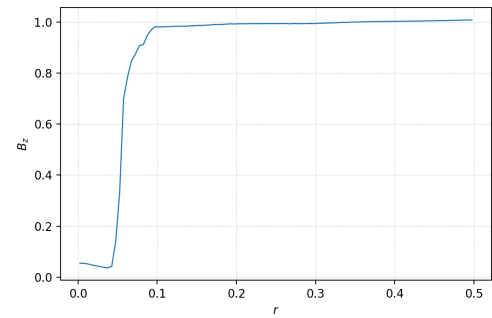
(a) $t = 1.52 \mu s$



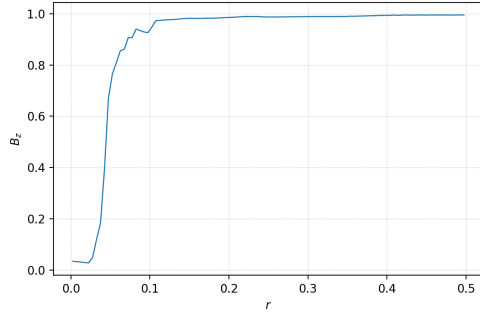
(b) $t = 3.02 \mu s$



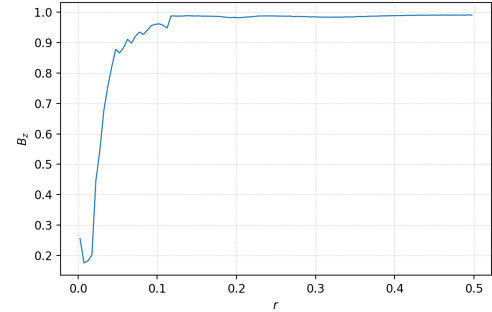
(c) $t = 4.52 \mu s$



(d) $t = 6.02 \mu s$



(e) $t = 7.52 \mu s$



(f) $t = 9.02 \mu s$

FIGURE 13 – Champ magnétique vertical moyenné radialement dans le plan (x, y) obtenu par simulation (en unités de B_0)

La figure 13 présente la moyenne radiale, dans le plan (x, y) , du champ magnétique vertical à différents instants. Pour construire ces profils de champs magnétiques, on échantillonne le rayon et on calcule

$$\langle \langle B_z \rangle (r) \rangle_{r \in [0, 0.5]}, \quad \langle B_z \rangle (r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_z(r, \theta, z = 0) d\theta$$

puis on normalise par B_0 . En pratique, l'intégrale est approximée par une moyenne sur une suite finie d'angles (θ_n) . Cette approche utilise la symétrie par rotation autour de l'axe z mentionnée précédemment. C'est cette quantité 1D que nous ferons apprendre à un réseau de neurones par la suite.

Ces profils magnétiques rendent bien compte des phénomènes déjà observés : une zone de champ ambiant pour les grands r , une zone de compression magnétique et la cavité.

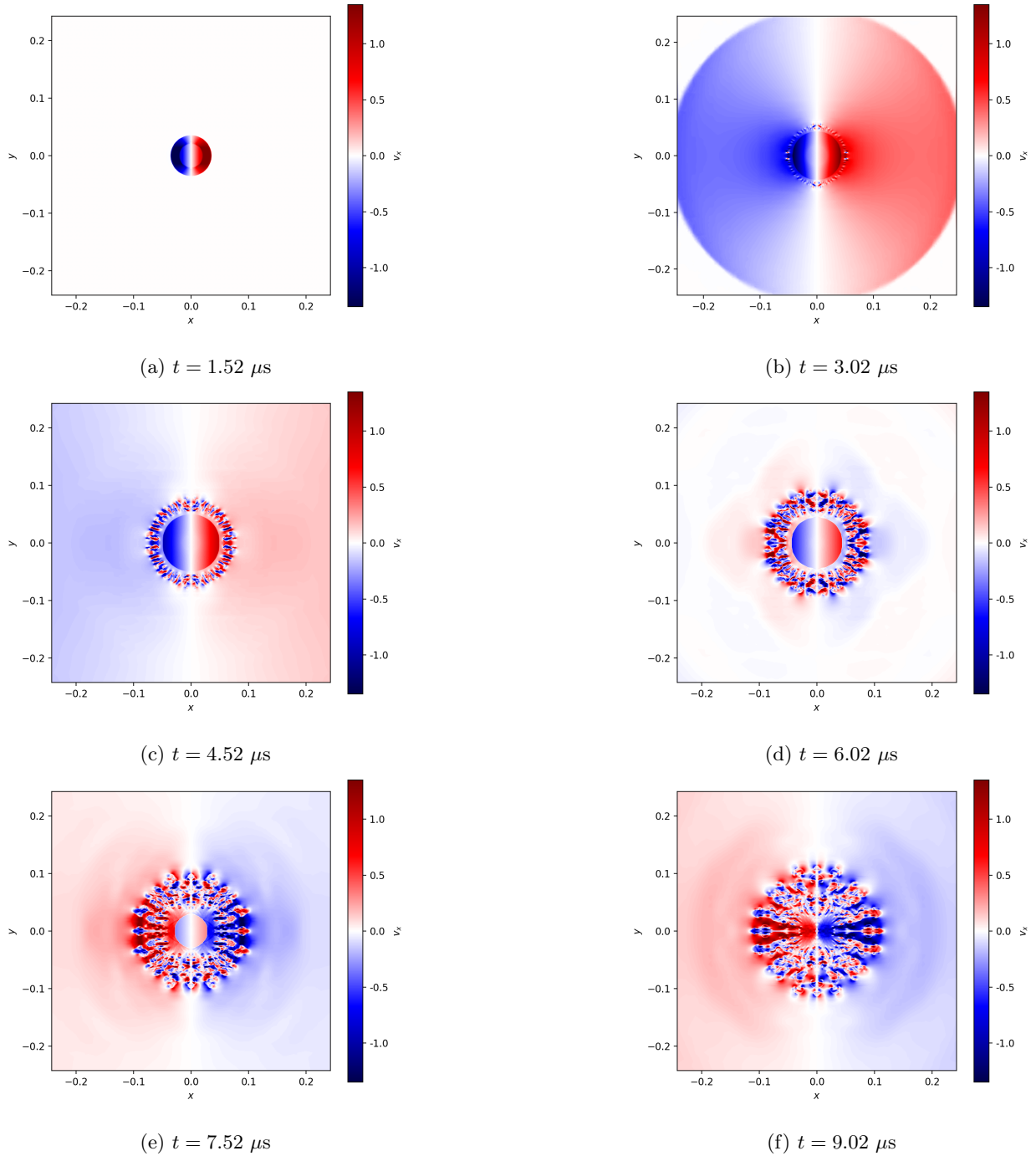


FIGURE 14 – Vitesse selon x dans le plan (x, y) obtenue par simulation (en unités de v_0)

Nous représentons dans la figure 14 la vitesse selon x du fluide MHD simulé. Un comportement analogue est observé pour la vitesse selon y . À l'initialisation, la cavité s'expand à une vitesse proche de v_0 . On voit

très vite apparaît le front magnétique qui s'expand rapidement, porté par les ions ambiants, tandis que les ions débris évoluent plus lentement, près du centre. Lorsque les instabilités commencent à apparaître, on constate que le signe de la vitesse change : la cavité entame son implosion.

Simuler pendant des temps ultérieurs aurait conduit à l'observation de phénomènes non-physiques. En effet, la rencontre entre les deux parties de fluide évoluant à des vitesses opposées aurait conduit à un effet de rebond et à la formation d'une cavité "de deuxième ordre", tandis que dans la réalité des processus non-conservatifs empêchent l'apparition de ce type de phénomènes.

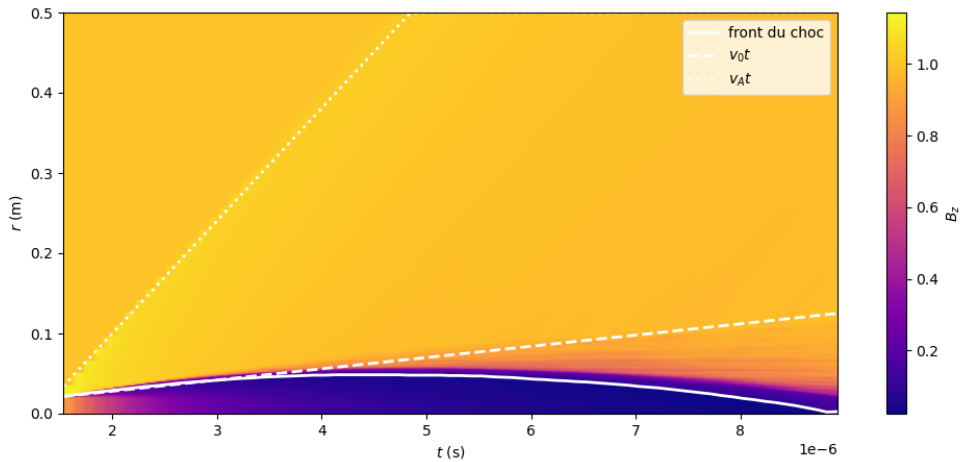


FIGURE 15 – Carte magnétique obtenue par simulation (en unités de B_0)

La figure 15 permet de représenter toute l'évolution magnétique de la cavité sur l'ensemble de sa durée de vie. Elle est construite en assemblant les profils radiaux calculés aux différents instants de la simulation. Elle permet d'observer l'évolution des différentes zones magnétiques et du rayon de la cavité. On constate sans surprise que la cavité s'expand initialement à la vitesse v_0 , puis ralentit. Le front magnétique évolue quant à lui à une vitesse proche de v_A , la vitesse d'Alfvén du plasma ambiant. Cette observation est attendue car en régime sub-alfvénique, les ondes de choc sont portées par le champ magnétique.

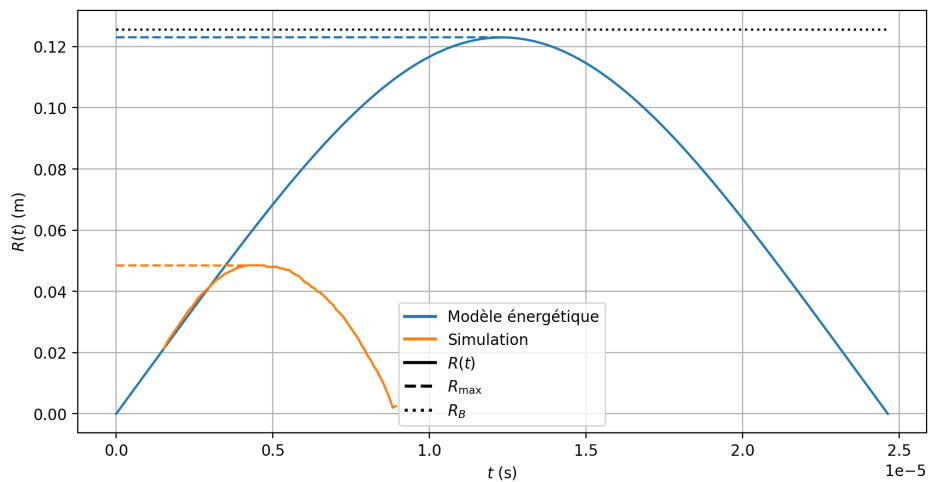


FIGURE 16 – Comparaison des rayons obtenus par le modèle énergétique et la simulation

Enfin, nous comparons dans la figure 16 le rayon de la cavité obtenu par simulation à celui donné par le modèle énergétique. Nous constatons que les valeurs théoriques pour le rayon maximal et le temps d’implosion sont sur-estimées. On peut attribuer cet écart significatif aux nombreuses hypothèses de notre modèle énergétique qui conduisent à l’oubli de plusieurs phénomènes physiques provoquant un ralentissement précoce de l’expansion de la cavité. Le bilan énergétique ne prend notamment pas en compte la création d’instabilités qui a un impact important sur le ralentissement de la croissance de la cavité. Le tableau 3 résume les principaux résultats et les écarts observés entre la simulation et le modèle énergétique.

	R_{\max} (m)	t_{\max} (s)	t_f (s)
Simulation	4.85e-02	4.13e-06	8.83e-06
Bilan énergétique	1.25e-01	1.25e-05	2.50e-05
Rapport	39%	33%	35%

TABLE 3 – Comparaison des résultats obtenus par simulation et par le modèle énergétique

4.4.2 Régime super-alfvénique

Nous étudions maintenant une cavité super-alfvénique. La plupart des expériences de laboratoire se situent en régime super-alfvénique. Nous choisissons ici la deuxième expérience décrite dans [6], de nombre d’Alfvén-Mach $M_A = 1.3$. Nous en rappelons dans le tableau 4 les paramètres physiques et procédons à leur adimensionnement. L’échelle étant similaire, le seul intérêt de l’adimensionnement ici est d’ajuster les paramètres pour la simulation d’ions débris C^{6+} , car les auteurs ont évalué que les ions débris étaient ionisés seulement 5 fois lors de l’expérience.

Paramètres physiques et de simulation 3D ([6])						
L (m)	B_0 (T)	$n_{a,0}$ (m^{-3})	v_0 ($m \cdot s^{-1}$)	N_d	R_{\max} (m)	t_{\max} (s)
1.00e+00	2.00e-02	5.00e+18	2.54e+05	1.39e+17	3.69e-01	2.04e-06
Paramètres adimensionnels						
	ρ_a/L	d_a/L	M_A	ρ_a/R_*		
	1.56e+02	1.02e-01	1.30e+00	4.86e+02		
Paramètres de simulation retenus						
L (m)	B_0 (T)	$n_{a,0}$ (m^{-3})	v_0 ($m \cdot s^{-1}$)	N_d	R_{\max} (m)	t_{\max} (s)
1.00e+00	2.00e-02	5.00e+18	2.54e+05	1.16e+17	3.47e-01	1.92e-06

TABLE 4 – Paramètres de simulation pour une cavité super-alfvénique

Nous choisissons là encore un rayon d’initialisation de la cavité $r_0 = 2$ cm, ce qui donne un temps initial $t_0 = r_0/v_0 \approx 0.0787 \mu s$.

Dans la suite, nous comparerons systématiquement les résultats obtenus par simulation avec ceux du modèle hybride dérivé dans la section 4.3. Cette démarche permettra de mettre en évidence les points d’accord et les limites de ce modèle.

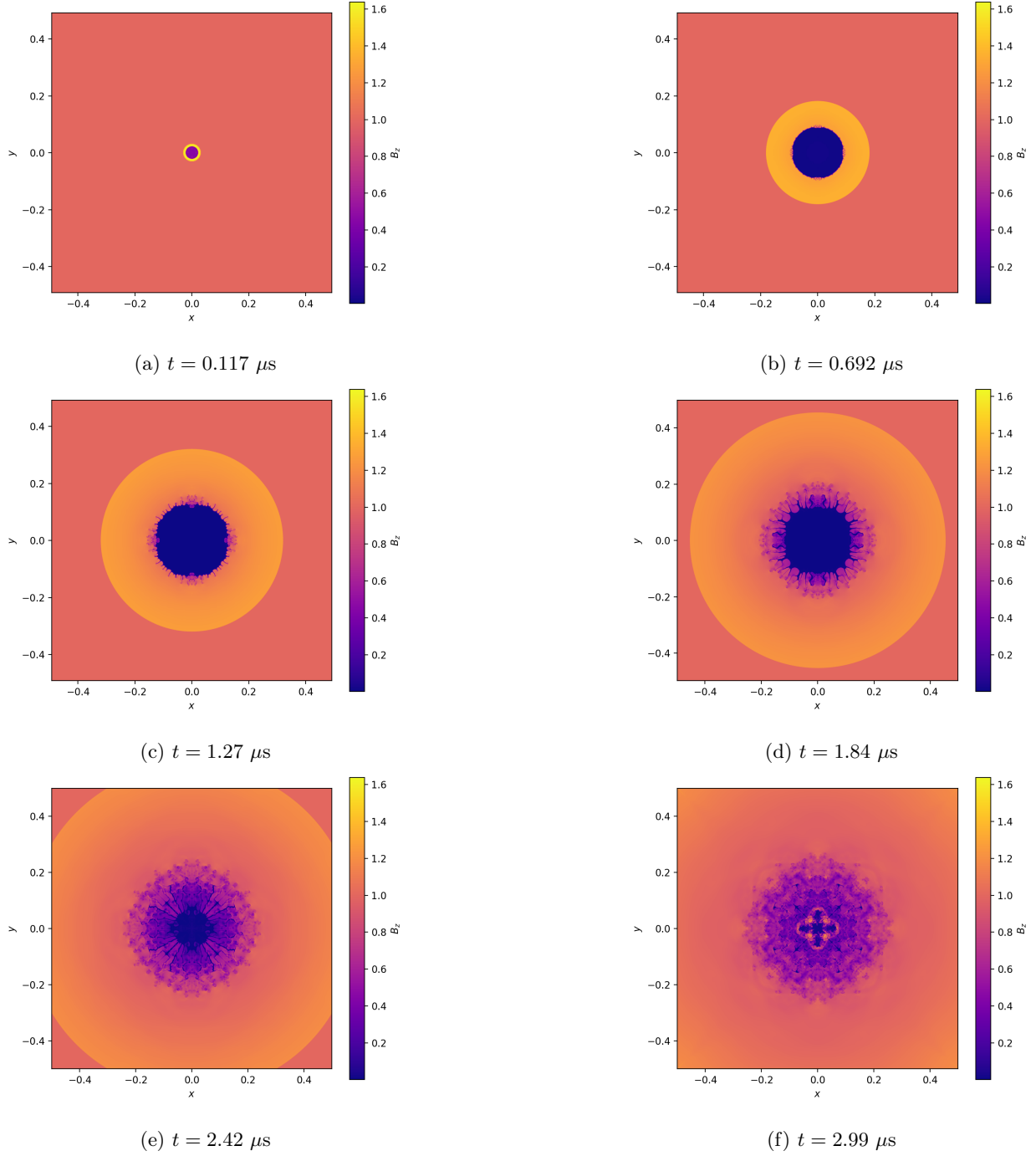


FIGURE 17 – Champ magnétique vertical dans le plan (x, y) obtenu par simulation (en unités de B_0)

Dans la figure 17, nous observons dès l'initialisation la formation d'une zone de faible champ de rayon r_0 , entourée d'un front de compression magnétique. Toutefois nous observons ici que le front magnétique s'expand à peu près à la même vitesse que la cavité, contrairement au cas sub-alfvénique où il grandissait plus rapidement. Cela s'explique par le fait qu'en régime super-alfvénique, ce n'est plus le champ magnétique qui transporte les ondes de choc mais les ions : le choc se propage donc environ à v_0 , comme la cavité. Comme

précédemment, nous observons la formation d'instabilités autour de la cavité lors de sa croissance. Ce sont ces instabilités qui mènent finalement à la stabilisation du rayon de la cavité puis à son implosion.

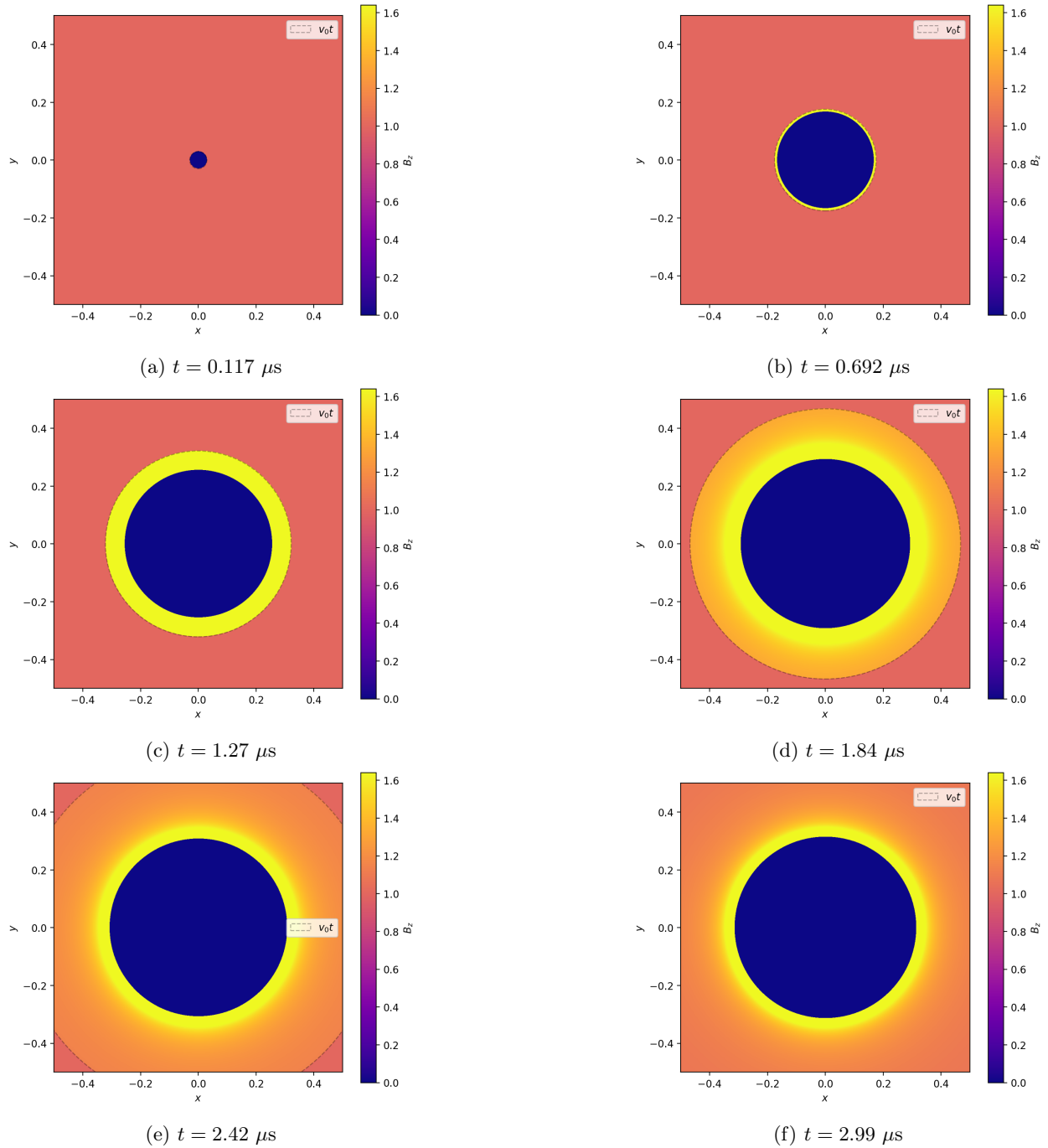


FIGURE 18 – Champ magnétique vertical dans le plan (x, y) obtenu par le modèle hybride (en unités de B_0)

Le modèle hybride (figure 18) reproduit qualitativement les mêmes effets, avec trois zones bien distinctes : la cavité (zone de faible champ), le front magnétique (zone de fort champ) et le milieu ambiant. Quelques différences notables par rapport à la simulation sont pourtant à souligner. La cavité obtenue par le modèle

hybride grandit plus vite et se stabilise à un rayon plus important. De plus, même si le front magnétique évolue à une vitesse tout à fait comparable au résultat obtenu par simulation, le maximum magnétique n'est pas localisé au même endroit : alors que dans la simulation le champ semble être maximum en $r = v_0 t$, le modèle hybride donne un champ maximal en $R(t)$ (rappelons que le modèle donne même un champ infini quand $r \rightarrow R(t)$). Enfin, le modèle hybride n'incluant pas la modélisation d'instabilités, nous ne pouvons pas observer la phase d'implosion.

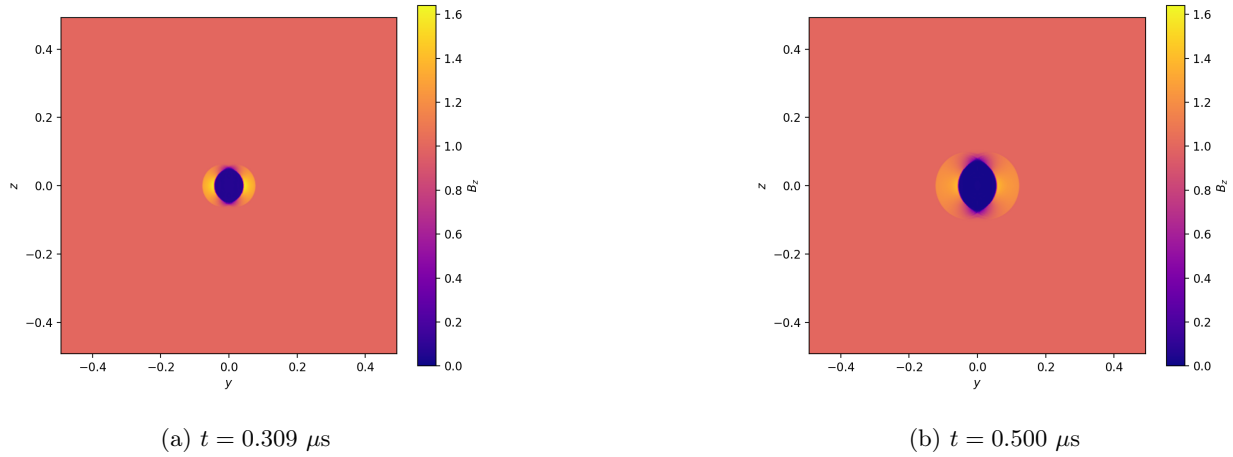


FIGURE 19 – Champ magnétique vertical dans le plan (y, z) obtenu par simulation (en unités de B_0)

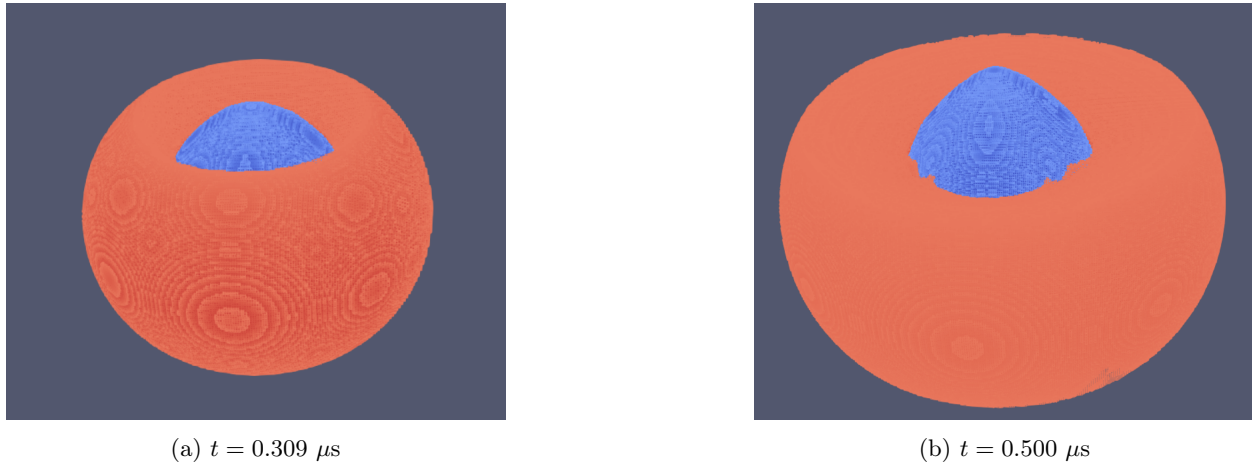


FIGURE 20 – Champ magnétique vertical obtenu par simulation

Les simulations 3D réalisées avec la même configuration de paramètres permettent d'observer le champ dans le plan (y, z) . On observe dans les figures 19 et 20, comme pour le cas sub-alfvénique, un allongement de la cavité le long de l'axe z . De plus, on constate que la zone de compression magnétique est concentrée autour du plan $z = 0$.

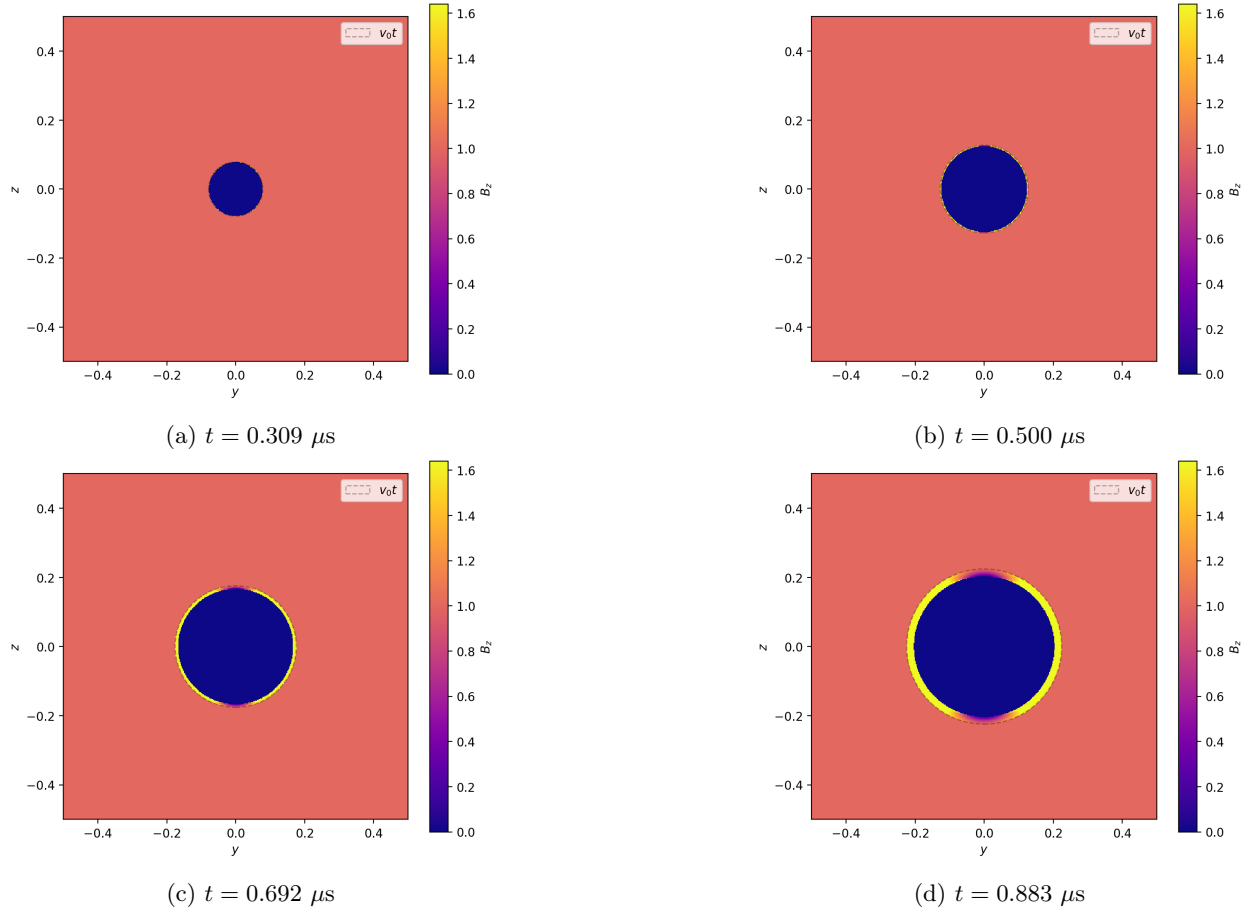
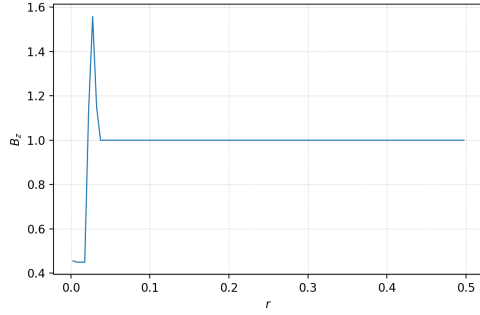
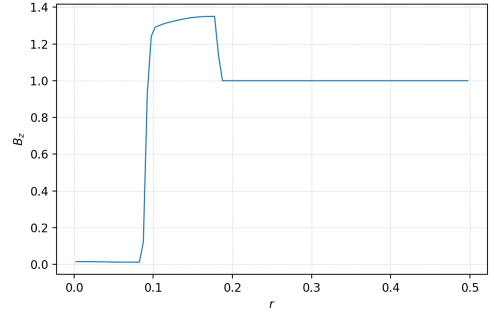


FIGURE 21 – Champ magnétique vertical dans le plan (y, z) obtenu par le modèle hybride (en unités de B_0)

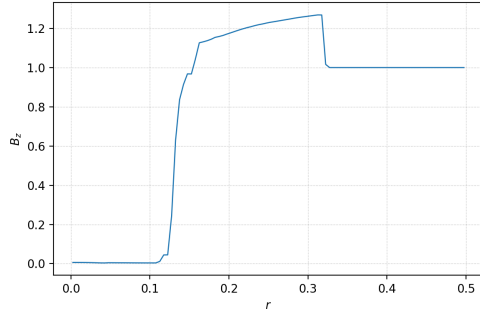
Les résultats de la figure 21, obtenus avec le modèle hybride, sont en accord qualitatif avec ces observations, mais sont difficilement observables en raison des hypothèses du modèle. En effet, lors de la dérivation de l'équation du champ, nous avons fait l'hypothèse d'un champ nul pour $r < R$, soit à l'intérieur d'une sphère de rayon R . Nous ne pouvons donc pas observer l'étirement de la cavité le long de l'axe z . En s'intéressant à des temps ultérieurs à ceux de la simulation, on voit cependant apparaître le même type de phénomènes avec un champ de plus grande amplitude autour de $z = 0$ et un champ plus faible autour de l'axe z .



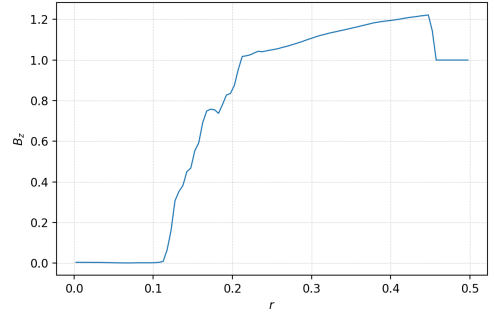
(a) $t = 0.117 \mu s$



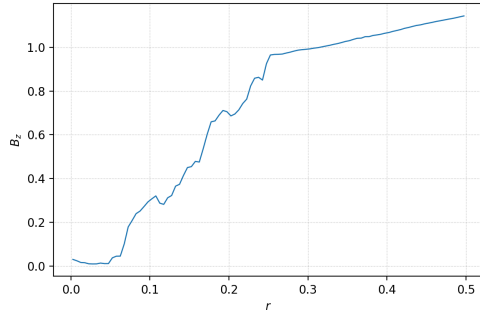
(b) $t = 0.692 \mu s$



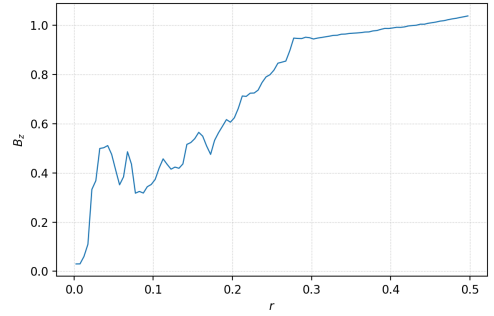
(c) $t = 1.27 \mu s$



(d) $t = 1.84 \mu s$



(e) $t = 2.42 \mu s$



(f) $t = 2.99 \mu s$

FIGURE 22 – Champ magnétique vertical moyenné radialement obtenu par simulation (en unités de B_0)

La visualisation dans la figure 22 des profils magnétiques moyennés radialement confirme les observations précédentes : la zone de compression magnétique est plus fine quand $M_A > 1$, car le bord de la cavité et le front magnétique évoluent à des vitesses comparables, en tous cas pendant la phase d'expansion. On retrouve également le choc magnétique en amont et en aval de la zone de compression. On peut également relever que l'amplitude maximale du champ magnétique décroît au cours du temps.

Les irrégularités observées sur les profils des temps les plus élevés sont dues à la présence de nombreuses instabilités qui rendent difficile la définition claire des différentes zones magnétiques. Ce bruitage du signal représente une difficulté majeure pour l'apprentissage automatique de ces profils.

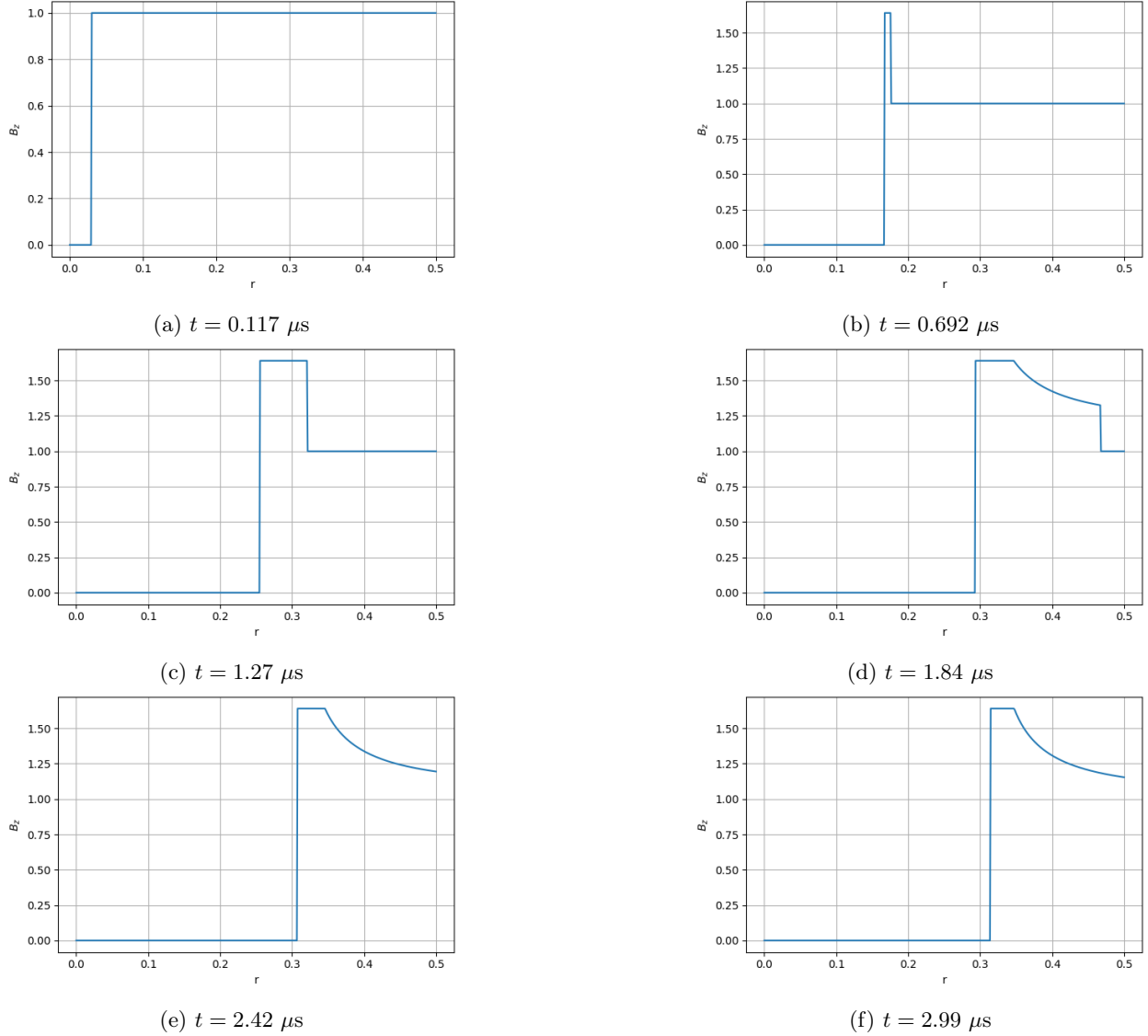


FIGURE 23 – Champ magnétique vertical moyenné radialement obtenu par le modèle hybride (en unités de B_0)

L'observation des profils magnétiques radiaux obtenus par le modèle hybride permet de mettre en évidence ses limites. En effet, nous supposons qu'à l'intérieur de la cavité le champ est identiquement nul ce qui devient faux dans les résultats de simulation pour les temps élevés. De plus, le modèle donne un choc parfait en amont et en aval de la zone de compression magnétique, alors que les données de simulation permettent d'observer une atténuation du choc au cours du temps.

La principale limite du modèle hybride est le fait que $\langle B_z \rangle(r) \rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow R$. Pour tracer les profils de la figure 23, nous avons tronqué le champ donné par le modèle afin d'obtenir des résultats qualitativement satisfaisants. On peut toutefois relever deux points correctement capturés par le modèle : la largeur de la zone de compression magnétique, et la décroissance de l'amplitude du champ dans la zone de compression au cours du temps.

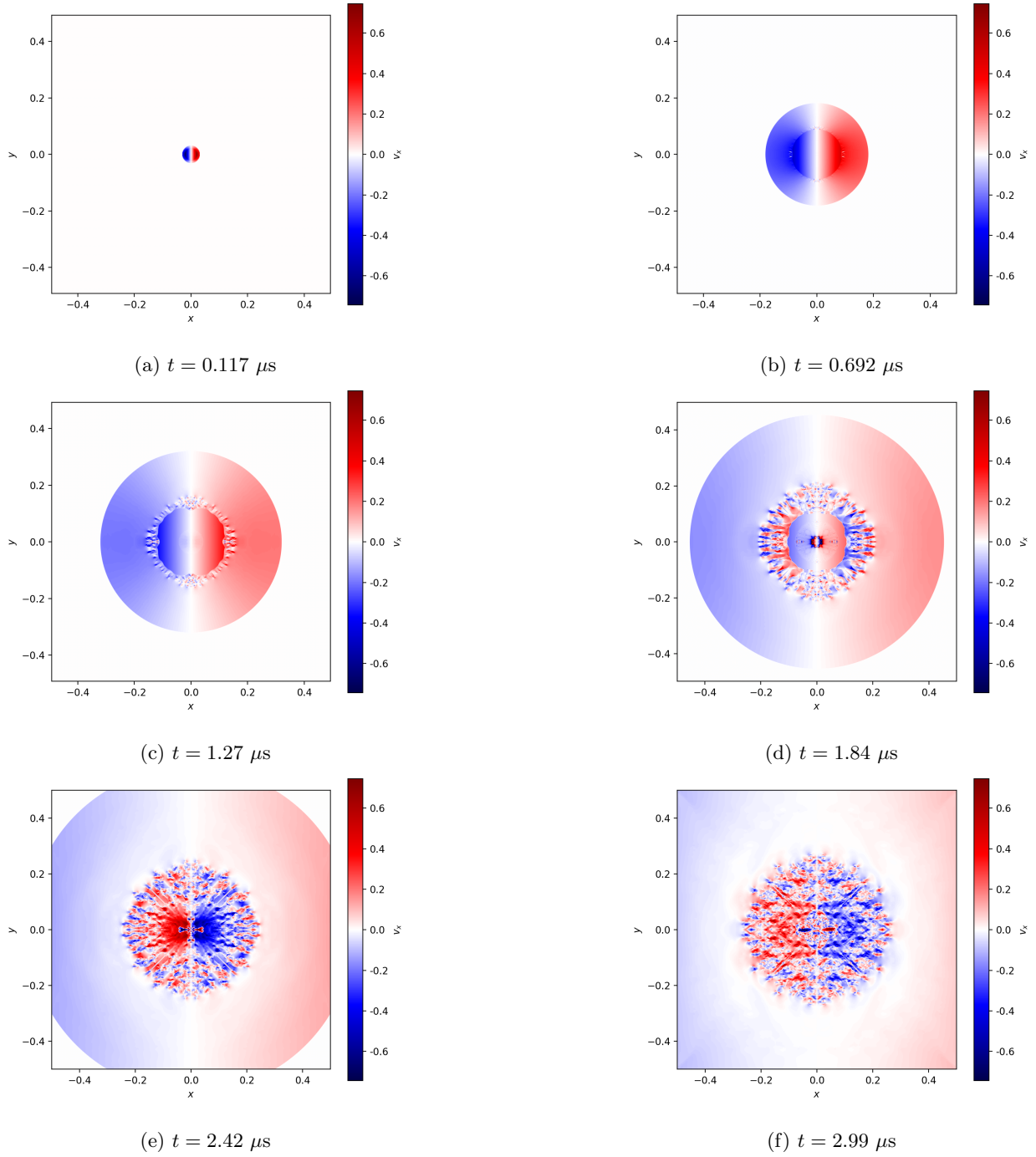
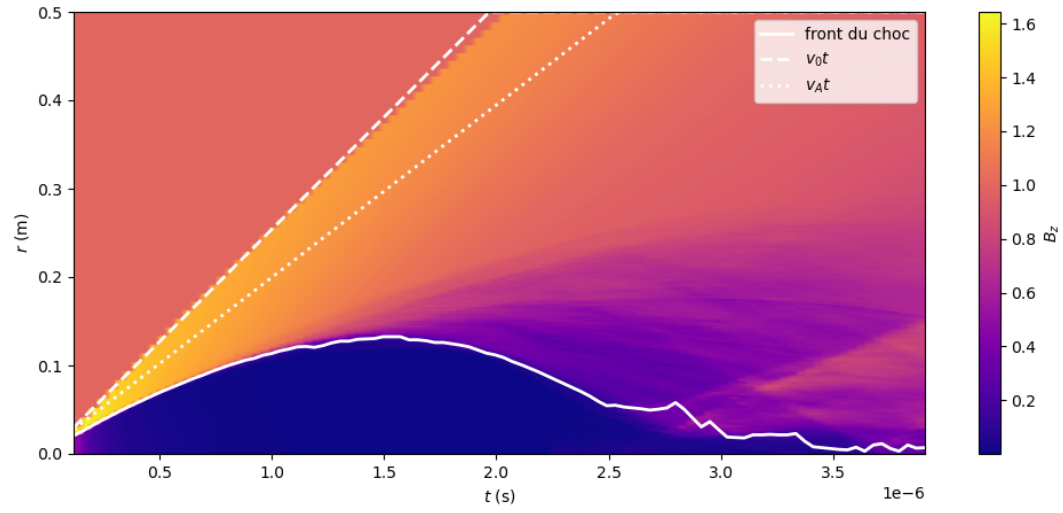
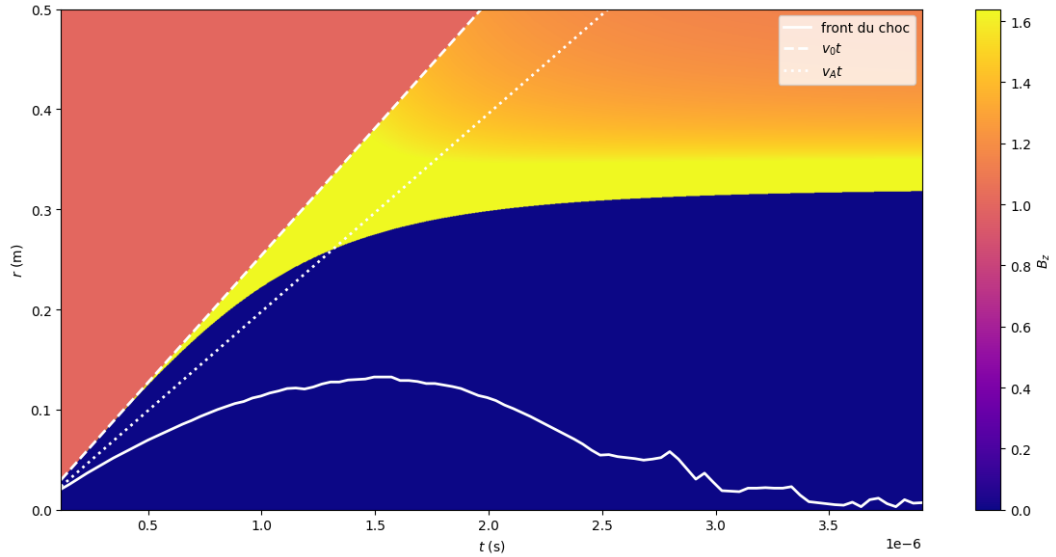


FIGURE 24 – Vitesse selon x dans le plan (x, y) obtenue par simulation (en unités de v_0)

La carte de vitesse du fluide, présentée en figure 24 apporte des renseignements similaires au cas sub-alfvénique, avec une expansion rapide du front magnétique et une expansion plus lent du nuage d’ions débris. L’apparition des instabilités est suivie de l’inversion du signe de la vitesse des ions débris, tandis que les ions ambiants déplacés par le choc continuent à s’éloigner. Finalement, la cavité implose.



(a) Simulation



(b) Modèle hybride

FIGURE 25 – Comparaison des cartes magnétiques (en unités de B_0)

La comparaison des cartes magnétiques de la simulation et du modèle hybride est riche de renseignements et synthétise les observations récoltées jusqu'ici. On observe dans la figure 25 que comme attendu, le choc se propage à une vitesse proche de v_0 puis légèrement décroissante (cette propagation se fait exactement à la vitesse v_0 dans le modèle). D'autre part, la cavité s'expand à une vitesse proche de v_0 au début du phénomène avant de ralentir. Le modèle ne permet pas de capturer la phase d'implosion et le rayon se stabilise à R_* alors que la simulation montre un rayon maximal inférieur suivi d'une implosion. La simulation montre un maximum de champ magnétique au contact de la zone ambiante tandis que ce maximum est atteint au bord de la cavité dans le modèle hybride.

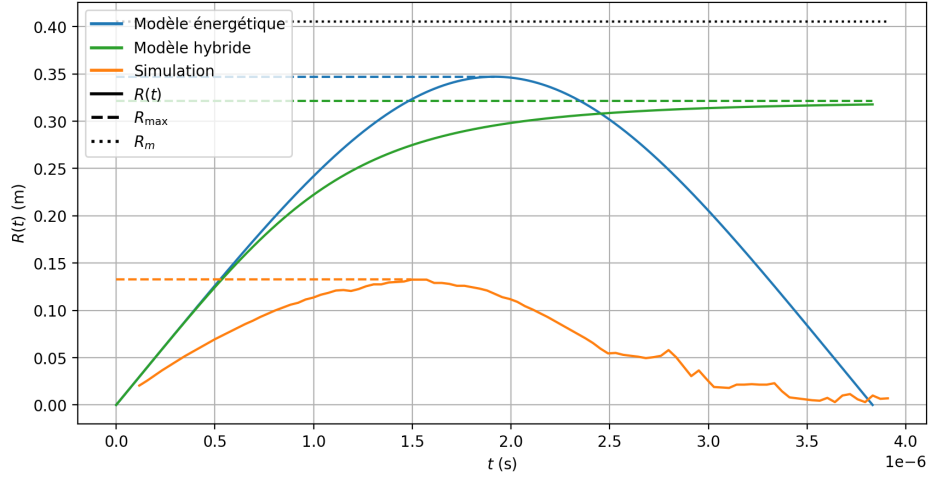


FIGURE 26 – Comparaison des rayons obtenus par le modèle énergétique, le modèle hybride et la simulation

Enfin, on compare en figure 26 l'évolution du rayon de la cavité obtenue par trois moyens : la simulation, le modèle hybride et le modèle énergétique. Les principaux résultats sont résumés dans le tableau 5. Le rayon maximal donné par la simulation est inférieur aux rayons maximaux prédits par les modèles, ce qui laisse penser, similairement au cas sub-alfvénique, que les modèles ne capturent pas tous les phénomènes. Néanmoins, le temps d'implosion obtenu ici est compatible avec celui donné par le modèle énergétique.

	R_{\max} (m)	t_{\max} (s)	t_f (s)
Simulation	1.33e-01	1.41e-06	3.60e-06
Bilan énergétique	3.47e-01	1.92e-06	3.83e-06
Rapport	38%	73%	94%

TABLE 5 – Comparaison des résultats obtenus par simulation et par le modèle énergétique

5 Approche par apprentissage automatique

Notre objectif est d'entraîner un réseau de neurones à la prédiction de profils de champ magnétique dans une cavité diamagnétique en expansion. Nous entraînerons plus précisément un perceptron multi-couches dense (*fully-connected multilayer perceptron*).

Le réseau de neurones prendra en entrée un nombre restreint de paramètres physiques et un temps donné, et fournira en sortie le profil radial du champ magnétique, moyenné angulairement, de la coupe de la cavité dans le plan (x, y) (on suppose un champ aligné avec l'axe z). Des exemples de ces profils de sortie se trouvent dans les figures 13 et 22. La variété des cavités diamagnétiques et la forte non-linéarité du problème nous poussent à générer une base de données importante, d'autant plus que la taille de la sortie du réseau de neurones est grande.

5.1 Adimensionnement et admissibilité des paramètres physiques

Même si nous nous attachons en particulier à la description des cavités diamagnétiques dans un contexte astrophysique, ce phénomène peut en fait se retrouver à toutes les échelles, jusqu'aux expériences de laboratoire. Bien sûr, les ordres de grandeur en jeu ne sont pas les mêmes dans une expérience de laboratoire ou dans un nuage interstellaire.

Pour pallier à ce problème d'échelle, nous choisissons d'adimensionner nos paramètres physiques afin d'assurer la reproductibilité et la généralisabilité de nos travaux. Notre objectif est qu'une fois choisie l'échelle spatiale caractéristique du phénomène, nos paramètres adimensionnels soient répartis sur quelques unités d'un ordre de grandeur pour représenter la vaste gamme de cavités physiquement admissibles. Un autre intérêt de l'adimensionnement est de fournir au réseau de neurones des paramètres regroupés sur un même ordre de grandeur, ce qui stabilise et accélère l'entraînement.

Les paramètres physiques que nous considérons, et qui seront ceux que nous ferons varier pour générer une base de données, sont l'amplitude du champ magnétique ambiant (supposé vertical) B_0 , la densité d'ions ambiants avant la perturbation $n_{a,0}$, la vitesse d'expansion initiale de la cavité v_0 et le nombre d'ions débris N_d .

Notons que nous fixons le rayon initial de la cavité r_0 , en considérant qu'il s'agit d'une fraction de l'échelle spatiale du phénomène (ou de la taille de la boîte de simulation), que nous noterons L . Ainsi, il est équivalent de considérer le nombre d'ions débris ou la densité initiale d'ions débris $n_{d,0}$. Nous fixons également les masses et les charges des ions considérés. Nous considérerons des ions débris C^{6+} et un plasma ambiant d'hydrogène, afin que le rayon de charge équivalente décrit en section 4.1 soit cohérent en régime trans-alfvénique.

Paramètres physiques Nous cherchons donc quatre paramètres facilement normalisables associés aux quatre paramètres physiques cités plus haut. Notons que deux d'entre eux décrivent le plasma, indépendamment du phénomène physique qui s'y déroule (B_0 et $n_{a,0}$), tandis que les deux autres décrivent spécifiquement une cavité diamagnétique (v_0 et N_d).

Nous avons à notre disposition plusieurs paramètres permettant de décrire le plasma ambiant et la cavité. D'abord, pour la description du plasma ambiant, nous avons besoin de paramètres faisant intervenir B_0 et $n_{a,0}$:

- Analogue du rayon de Larmor des ions ambiants :

$$\rho_a = \frac{c}{\omega_{c,a}}$$

avec $\omega_{c,a} = \frac{Z_a e B_0}{m_a}$ la pulsation cyclotron des ions ambiants. Cette grandeur caractéristique correspond au rayon de Larmor décrit dans la section 2.1 avec une vitesse égale à c . Plus que son sens physique, c'est le lien qu'elle permet d'établir entre l'amplitude du champ ambiant et une longueur caractéristique qui fait son intérêt.

— Longueur d'inertie des ions ambiants :

$$d_a = \frac{c}{\omega_{p,a}}$$

avec $\omega_{p,a} = \left(\frac{n_{a,0}(Z_a e)^2}{m_a \epsilon_0} \right)^{1/2}$ la pulsation du plasma ambiant.

Puis, pour la description de la cavité, nous avons besoin de paramètres faisant intervenir v_0 et N_d :

— Nombre d'Alfvén-Mach :

$$M_A = \frac{v_0}{v_A}$$

avec $v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 m_a n_{a,0}}}$ la vitesse d'Alfvén du plasma ambiant ;

— Rayon de charge équivalente :

$$R_* = \left(\frac{3Z_d N_d}{4\pi Z_a n_{a,0}} \right)^{1/3}.$$

Nous avons donc à notre disposition deux paramètres caractéristiques décrivant le plasma ambiant (ρ_a et d_a) et deux paramètres caractéristiques décrivant la cavité (M_A et R_*).

Adimensionnement Nous allons maintenant adimensionner ces paramètres caractéristiques. Nous allons utiliser la taille de la boîte de simulation, que nous noterons L . On choisit l'adimensionnement suivant :

$$B_0 \leftrightarrow \frac{\rho_a}{L}, \quad n_{a,0} \leftrightarrow \frac{d_a}{L}, \quad v_0 \leftrightarrow M_A, \quad N_d \leftrightarrow \frac{\rho_a}{R_*}.$$

Le passage des paramètres physiques aux paramètres adimensionnels se fait de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_a}{L}(B_0) = \frac{cm_a}{Z_a e L} B_0^{-1} \\ \frac{d_a}{L}(n_{a,0}) = \frac{c}{L} \left(\frac{\epsilon_0 m_a}{(Z_a e)^2} \right)^{1/2} n_{a,0}^{-1/2} \\ M_A(B_0, n_{a,0}, v_0) = \sqrt{\mu_0 m_a} B_0^{-1} n_{a,0}^{1/2} v_0 \\ \frac{\rho_a}{R_*}(B_0, n_{a,0}, N_d) = \frac{cm_a}{Z_a e} \left(\frac{4\pi Z_a}{3Z_d} \right)^{1/3} B_0^{-1} n_{a,0}^{1/3} N_d^{-1/3} \end{array} \right.$$

et le retour vers les paramètres physiques s'opère ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 \left(\frac{\rho_a}{L} \right) = \frac{cm_a}{Z_a e L} \left(\frac{\rho_a}{L} \right)^{-1} \\ n_{a,0} \left(\frac{d_a}{L} \right) = \frac{\epsilon_0 c^2 m_a}{(Z_a e)^2 L^2} \left(\frac{d_a}{L} \right)^{-2} \\ v_0 \left(\frac{\rho_a}{L}, \frac{d_a}{L}, M_A \right) = c \left(\frac{\rho_a}{L} \right)^{-1} \frac{d_a}{L} M_A \\ N_d \left(\frac{\rho_a}{L}, \frac{d_a}{L}, \frac{\rho_a}{R_*} \right) = L \frac{4\pi \epsilon_0 c^2 m_a}{3Z_a Z_d e^2} \left(\frac{\rho_a}{L} \right)^3 \left(\frac{d_a}{L} \right)^{-2} \left(\frac{\rho_a}{R_*} \right)^{-3} \end{array} \right.$$

Choix des gammes de paramètres Pour déterminer les intervalles dans lesquels nous ferons varier chacun de nos paramètres, nous consultons les données présentes dans la littérature et notamment celles des lâchers de baryum CRRES ([4]) et des tirs laser réalisés par [5], [6] et [8].

Nous récupérons les paramètres physiques (B_0 , $n_{a,0}$, v_0 , M_A) utilisés dans les expériences, puis nous passons aux paramètres caractéristiques adimensionnels (ρ_a/L , d_a/L , M_A , ρ_a/R_*) et enfin nous passons au \log_{10} car les paramètres varient sur plusieurs ordres de grandeur. Les valeurs numériques obtenues dans la littérature sont données en annexe A.

À partir de ces valeurs, nous modélisons la dispersion des données par des gaussiennes (voir la figure 27) dont les caractéristiques sont données dans le tableau 6. Nous échantillonnerons nos paramètres adimensionnés en \log_{10} dans les intervalles de confiance à 95% de ces gaussiennes.

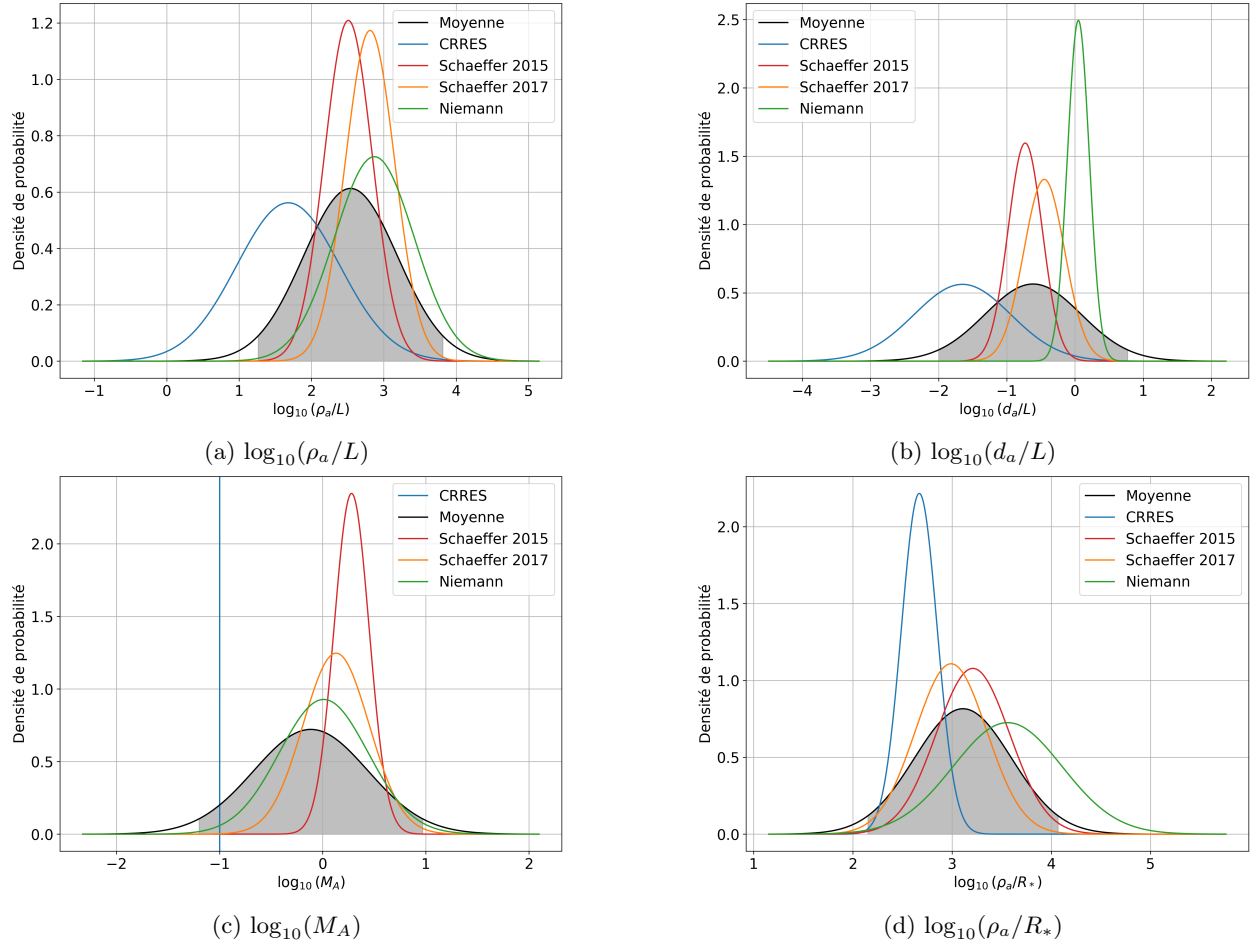


FIGURE 27 – Dispersion des données issues de la littérature et plages retenues en noir

	Moyenne	Écart-type	Borne inférieure	Borne supérieure
ρ_a/L	2.54	0.651	1.264	3.816
d_a/L	-0.614	0.707	-2	0.772
M_A	-0.115	0.553	-1.199	0.969
ρ_a/R_*	3.11	0.489	2.152	4.068

TABLE 6 – Espace des paramètres adimensionnels admissibles

Contraintes Le domaine échantillonné est pour le moment un cube de dimension 4. Toutefois, nous imposons des contraintes aux combinaisons de paramètres liées à la simulation numérique. Le code simule le phénomène physique entre les instants $t = 0$ et t_f . Nous choisissons t_f tel qu'il corresponde à l'instant où le phénomène s'est entièrement déroulé (explosion puis implosion de la cavité), soit $t_f = 2t_{\max}$. On rappelle

que l'évolution du rayon de la cavité est régie par l'équation

$$R(t) = \begin{cases} R_{\max} \left(\mathcal{B}^{-1} \left(\frac{3v_0}{R_{\max}} t; \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) \right)^{1/3}, & 0 < t < t_{\max} \\ R_{\max} \left(\mathcal{B}^{-1} \left(\frac{3v_0}{R_{\max}} (2t_{\max} - t); \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) \right)^{1/3}, & t_{\max} < t < 2t_{\max} \end{cases}$$

avec

$$t_{\max} = \frac{R_{\max}}{3v_0} \mathcal{B} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right), \quad R_{\max} = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{N_d m_d v_0^2}{\frac{B_0^2}{\mu_0} + n_{a,0} m_a v_0^2} \right)^{1/3}.$$

Dans la suite il sera utile d'avoir l'expression de R_{\max} en fonction des paramètres adimensionnels :

$$R_{\max} = LM^{-1} \frac{\rho_a}{L} \left(\frac{\rho_a}{R_*} \right)^{-1} (1 + M_A^{-2})^{-1/3}$$

où $M = \left(\frac{Z_d m_a}{Z_a m_d} \right)^{1/3}$ est le paramètre de magnétisation.

La cavité en expansion est entourée d'un front magnétique qui se déplace à v_A dans le cas sub-alfvénique et à v_0 dans le cas super-alfvénique. Ce front est plus grand que la cavité et nous voulons qu'il reste à l'intérieur de la boîte de simulation jusqu'à t_f . Nous imposons donc la contrainte suivante :

$$\begin{cases} v_A t_f < L/2, & M_A < 1 \\ v_0 t_f < L/2, & M_A > 1 \end{cases}$$

Ces conditions exprimées en fonction des paramètres adimensionnels deviennent :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\rho_a}{L} \left(\frac{\rho_a}{R_*} \right)^{-1} M_A^{-1} (1 + M_A^{-2})^{-1/3} < \frac{3}{4} \frac{M}{\mathcal{B}(1/3, 1/2)}, & M_A < 1 \\ \frac{\rho_a}{L} \left(\frac{\rho_a}{R_*} \right)^{-1} (1 + M_A^{-2})^{-1/3} < \frac{3}{4} \frac{M}{\mathcal{B}(1/3, 1/2)}, & M_A > 1 \end{cases}}$$

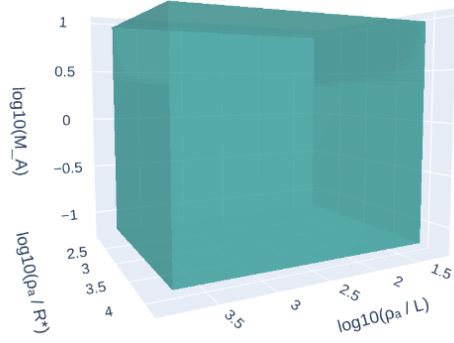
Nous disposons d'un paramètre permettant de fixer le rayon initial de la cavité r_0 . Nous choisissons $r_0 = 2 \times 10^{-2} L$ de sorte que si la boîte de simulation mesure un mètre de côté, la cavité aura un rayon initial de deux centimètres, ce qui est suffisant pour qu'elle soit correctement résolue par le maillage de la simulation. Pour que la simulation ait un sens, nous imposons que le rayon maximal atteint par la cavité soit supérieur à r_0 , c'est à dire la condition

$$R_{\max} > r_0.$$

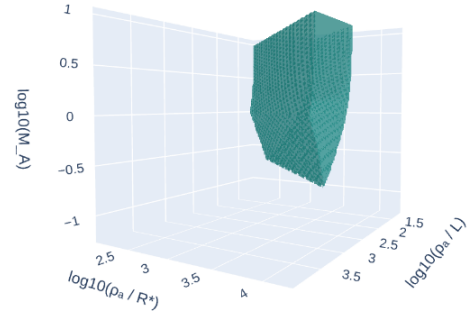
Cela donne la condition suivante sur les paramètres adimensionnels :

$$\boxed{\frac{\rho_a}{L} \left(\frac{\rho_a}{R_*} \right)^{-1} (1 + M_A^{-2})^{-1/3} > 2 \times 10^{-2} M.}$$

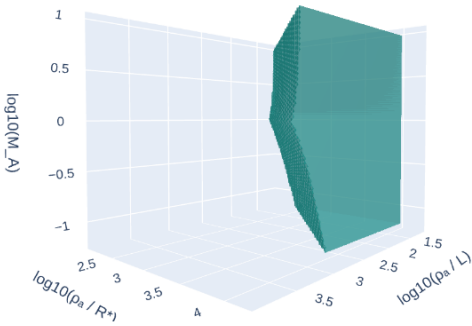
Comme on peut le voir dans la figure 28, ces contraintes rendent l'espace des paramètres admissibles bien plus complexe qu'un simple cube. Nous devons utiliser la méthode du rejet pour nous assurer que les paramètres échantillonnés sont bien compatibles avec les contraintes de la simulation.



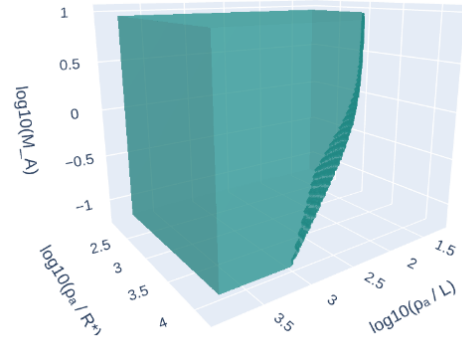
(a) Domaine sans contraintes



(b) Domaine contraint ($\approx 20\%$)



(c) Condition sur le temps final ($\approx 36\%$)



(d) Condition sur le rayon initial ($\approx 83\%$)

FIGURE 28 – Domaine échantillonné et contraintes associées

5.2 Génération d'une base de données de simulations

En utilisant les paramètres adimensionnels décrits dans la section précédente, nous pouvons générer une base de données de simulations représentative de la diversité des cavités diamagnétiques pouvant se produire dans des régimes physiques très différents. Nous suivons la procédure suivante pour générer la base de données :

1. Échantillonnage des paramètres adimensionnels en \log_{10} dans le domaine contraint par la méthode du rejet ;
2. Retour aux paramètres physiques pour le fichier d'initialisation du solveur ;
3. Simulation par le solveur MHD idéale du code de calcul Kalypsso ;
4. Post-traitement des simulations (moyennage angulaire du champ magnétique dans le plan (x, y)).

À la fin de la procédure, nous avons deux objets :

- Paramètres d'entrée : tableau de forme $(N \times n, 5)$ où N est le nombre de simulations effectuées, n est le nombre de pas de temps enregistrés dans chaque simulation, et 5 est le nombre de paramètres (les 4 paramètres physiques/adimensionnels décrits précédemment et le temps) ;
- Données de sortie : tableau de forme $(N \times n, \eta)$ où η est le nombre de points d'échantillonnage d'un profil magnétique.

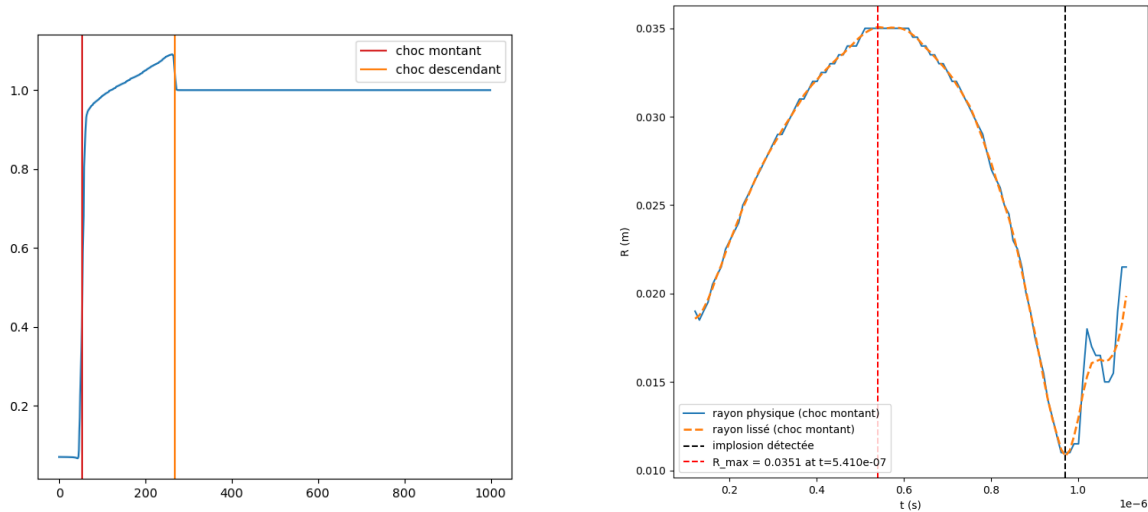
5.3 Sélection des profils pertinents

Nous avons effectué $N = 4025$ simulations, en enregistrant $n = 100$ pas de temps par simulation. Nous sommes donc en possession de 402500 profils magnétiques, chacun d'eux étant échantillonné sur $\eta = 1000$

points. Toutefois, tous ces profils ne sont pas utilisables pour l'entraînement du métamodèle. En effet, nous avons fixé le temps final de la simulation à $t_f = 2t_{\max}$ où t_{\max} est une estimation issue du bilan énergétique de la section 4.2. Toutefois, comme nous l'avons vu dans la section 4.4, t_f est un majorant de la durée réelle du phénomène. Par conséquent, certaines cavités ont eu le temps de terminer leur phase d'implosion puis de rebondir de manière non-physique avant la fin de la simulation. Cela conduit à la formation de cavités "du second ordre", non physiques, notamment parce que le code MHD idéale ne modélise pas de phénomène dispersif.

Nous devons donc sélectionner uniquement les profils pertinents afin de ne pas fausser l'entraînement du métamodèle. Nous utilisons pour cela deux techniques complémentaires.

Détection de l'implosion par suivi du rayon de la cavité Une première technique consiste, pour chaque profil magnétique, à détecter le choc montant qui sépare la zone de dépression magnétique de la zone de compression magnétique. Ce choc se produit au rayon de la cavité, et effectuer cette procédure pour tous les pas de temps consécutifs d'une simulation permet de suivre le rayon de la cavité et de détecter l'implosion.



(a) Détection du choc montant d'un profil magnétique (b) Reconstitution de l'évolution du rayon de la cavité et détection de l'instant d'implosion

FIGURE 29 – Procédure d'élimination des profils non-physiques

La figure 29 décrit la procédure suivie pour détecter le choc montant sur chaque profil magnétique, reconstituer l'évolution du rayon de la cavité au cours du temps et détecter l'instant d'implosion. Nous éliminons ensuite de la base de données tous les profils qui suivent l'implosion. À l'issue de cette procédure, nous conservons environ 90% des profils de la base de données initiale.

Détection des profils non-physiques par clustering Après cette première phase, il n'est pas garanti que tous les profils non-physiques aient été écartés la base de données. Pour les identifier, nous utilisons la technique de clustering *K-means*. Cette procédure permet de regrouper en K clusters les profils similaires.

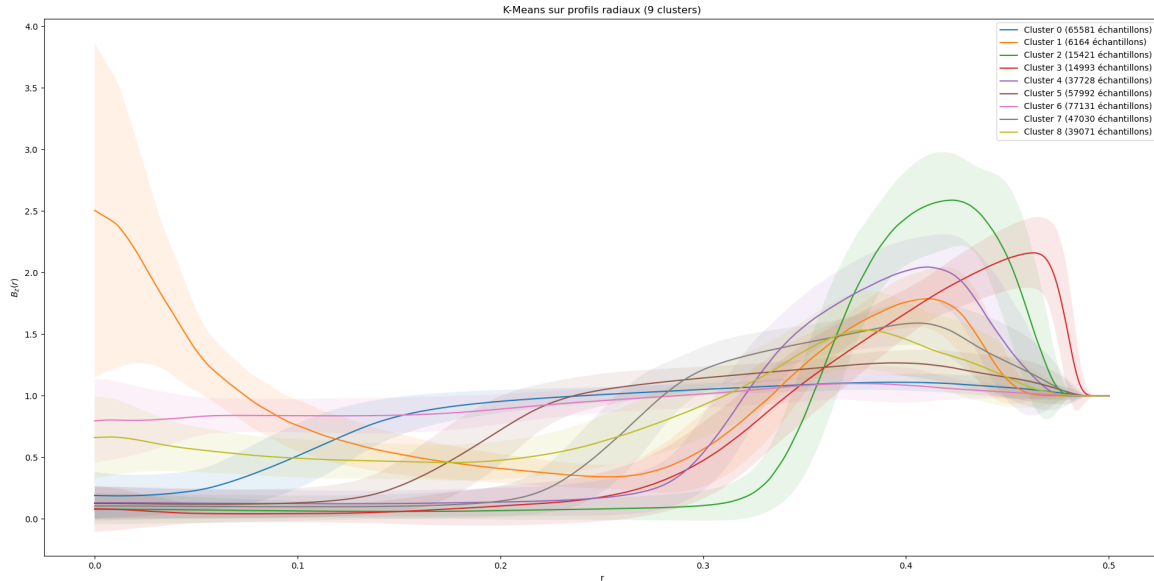


FIGURE 30 – Clustering des profils magnétiques de la base de données ($K = 9$)

La figure 30 montre les résultats de la procédure de clustering. Le cluster orange regroupe les profils présentant une zone de fort champ proche de l'origine. Ces profils ne correspondent pas à des cavités diamagnétiques et nous pouvons donc éliminer tout ce cluster de la base de données. Au cours de cette phase, nous conservons environ 98% des profils magnétiques, soit environ 88% de la base de données initiale.

Nous disposons donc d'une base de données de plus de 350000 profils pour entraîner notre réseau de neurones.

5.4 Conception d'un métamodèle

5.4.1 Introduction aux réseaux de neurones artificiels

Les méthodes d'apprentissage se sont fortement développées depuis plusieurs décennies. Elles adoptent un paradigme radicalement différent de celui des méthodes classiques : au lieu de chercher à résoudre l'équation, c'est-à-dire comprendre le phénomène physique déterminant l'état du système, leur but est seulement de donner une solution acceptable sous forme de boîte noire en minimisant une fonction résiduelle prédéfinie.

On ne fournit donc pas l'équation régissant l'évolution spatio-temporelle du système mais des données, issues de mesures *in situ* ou de simulations numériques. Puis on mesure l'écart d'une première approximation de la solution, souvent éloignée de la réalité, avec la solution réelle. Le modèle possède un ensemble de paramètres qu'il peut ajuster pour se rapprocher de la solution.

Fractionnement des données On le voit, l'apprentissage automatique repose sur l'usage de données qu'il convient de bien manipuler pour obtenir des résultats fiables. Ces données sont composées de couples (*input*, *output*) et l'objectif du réseau de neurones est de prévoir la sortie à partir de l'entrée. Pour cela, il compare la sortie réelle fournie à la sortie qu'il construit. On fractionne notre jeu de données (*dataset*) en trois ensembles :

Ensemble d'entraînement (*train set*) Il s'agit des données que le réseau de neurones utilisera pour ajuster ses paramètres. Ce sont les données que le métamodèle "apprend".

Ensemble de validation (*validation set*) Il s'agit de données que l'on utilise pour évaluer la capacité du métamodèle à généraliser ce qu'il a "appris" du *train set* : il n'ajuste pas ses paramètres au contact

de ces données mais compare sa prédiction (sur une entrée inconnue) à la réalité. On utilise aussi cet ensemble pour choisir les hyperparamètres du réseau de neurones.

Ensemble de test (*test set*) Il s'agit de données qui restent inconnues au métamodèle tout au long de l'entraînement et du choix des hyperparamètres et qui servent à évaluer les capacités du modèle final sur des données nouvelles.

Il est primordial que la frontière entre le *train set* et le reste du *dataset* reste hermétique, sans quoi on ne pourrait évaluer la capacité de généralisation du métamodèle.

Il est possible que le modèle performe sur les données d'entraînement mais pas sur les données de validation. On parle alors de sur-apprentissage (*overfitting*) : au lieu de capter la dynamique sous-jacente aux données, le modèle se contente de mémoriser les exemples auxquels il a eu accès et n'est pas efficace en présence de données nouvelles. Des stratégies de régularisation permettent de minimiser les risques d'*overfitting*. Le sur-apprentissage est souvent dû à une architecture trop complexe. À l'inverse, une architecture trop simple peut conduire à une situation de sous-apprentissage (*underfitting*) : la complexité du modèle n'est alors pas suffisante pour capter le phénomène physique.

Apprentissage Concrètement, le modèle évalue à chaque itération une fonction de coût (*loss function*) qui mesure l'écart entre l'approximation évaluée par le modèle et la solution réelle :

$$\mathcal{C}(y, \hat{y}) = \|y - \hat{y}\|$$

où \hat{y} est l'approximation de la solution par le métamodèle et y la solution réelle. De multiples choix de normes sont possibles pour évaluer cette fonction coût. Dans notre cas, nous souhaitons quantifier la similitude entre le profil radial prédit et le profil radial réel. Nous échantillons donc ce profil radial en η points. Par exemple avec l'erreur quadratique moyenne (*mean squared error*, MSE), on a :

$$\text{MSE}(y, \hat{y}) = \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^{\eta} \left| y\left(\frac{i}{\eta}\right) - \hat{y}\left(\frac{i}{\eta}\right) \right|^2$$

ou bien avec l'erreur absolue moyenne (*mean absolute error*, MAE) :

$$\text{MAE}(y, \hat{y}) = \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^{\eta} \left| y\left(\frac{i}{\eta}\right) - \hat{y}\left(\frac{i}{\eta}\right) \right|.$$

On choisit, pour la conception de notre méta-modèle, un perceptron multi-couches (*multilayer perceptron*, MLP). Ce choix est guidé par la littérature abondante décrivant et analysant ce type d'architecture, ce qui en fait un modèle éprouvé pour les problèmes de régression.

Un perceptron multi-couches est constitué d'une succession de couches, la première contenant les paramètres d'entrée du réseau de neurones, et la dernière contenant le résultat calculé par le métamodèle. Dans notre cas, la première couche est constitué de quatre paramètres physiques ou adimensionnels et du temps. La dernière couche retourne un profil radial moyenné du champ magnétique, échantillonné avec une certaine finesse.

Toute la puissance des MLP réside dans les couches intermédiaires, que l'on appelle couche cachées (*hidden layers*). Chacune des couches cachées contient un certain nombre de neurones. Un neurone est en fait un paramètre ajustable (le biais du neurone, *bias*) du réseau de neurones. Chaque neurone d'une couche est relié à tous les neurones de la couche suivante : c'est ce que l'on appelle un réseau dense (*fully-connected*). Les liens entre neurones sont eux aussi affublés d'un paramètre : le poids (*weight*).

Chaque neurone est la somme pondérée biaisée des neurones de la couche précédente : on multiplie tous les neurones de la couche précédente par les poids qui les lient au neurone considéré, puis on ajoute à ce dernier le biais. Ces transformations, bien que très complexes, restent parfaitement linéaires. Aussi, pour pouvoir modéliser avec un MLP des phénomènes plus variés, il convient d'introduire de la non-linéarité dans son architecture. C'est pourquoi on introduit des fonctions d'activation, non-linéaires, en sortie de chaque couche.

On le voit, un réseau de neurones est en fait un ensemble de paramètres ajustables qui lient les entrées (*inputs*) aux sorties (*outputs*). Ce sont ces paramètres, initialement aléatoires, qui sont ajustés au cours de l'entraînement du métamodèle pour approcher de manière toujours plus précise le modèle sous-jacent aux exemples fournis.

Pour minimiser la fonction de coût, le réseau de neurones effectue une descente de gradient (algorithme de rétropropagation ou *backpropagation*). Les paramètres sont actualisés après l'évaluation de la fonction de coût sur chaque batch (sous-ensemble de la base de données).

5.4.2 Stratégies d'entraînement

Choix d'architecture Le choix du nombre de couches cachées et du nombre de neurones par couche est un arbitrage crucial. Plus le réseau comporte de couches et de neurones, plus il sera à même d'apprendre des processus complexes (on augmente en fait la taille de l'espace fonctionnel accessible au métamodèle). Mais un réseau trop grand ralentit l'entraînement et favorise le sur-apprentissage.

Notons que l'on dispose d'une garantie théorique sur la capacité des MLP à approximer une fonction arbitraire. En effet, le théorème d'approximation universelle, démontré en 1989, énonce qu'étant donnée une fonction d'activation $\sigma \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour toute fonction continue, on peut trouver un MLP à une seule couche cachée contenant un nombre de neurones fini permettant d'approcher cette fonction à une précision arbitraire. Plus précisément, soient K un compact de $\mathbb{R}^{n_{in}}$, $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^{n_{out}})$ et $\epsilon > 0$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ (nombre de neurones), $W^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times n_{in}}$ (matrice des poids de la couche d'entrée à la couche cachée), $\mathbf{b}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (vecteur des biais de la couche cachée), $W^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_{out} \times n}$ (matrice des poids de la couche cachée à la couche de sortie) et $\mathbf{b}^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_{out}}$ (vecteur des biais de la couche de sortie) tels que

$$\sup_{\mathbf{x} \in K} \|f(\mathbf{x}) - (W^{(1)}(\sigma(W^{(0)}\mathbf{x} + \mathbf{b}^{(0)})) + \mathbf{b}^{(1)})\| < \epsilon.$$

Notons l le nombre de couches cachées du MLP et n le nombre de neurones par couche cachée (on suppose que toutes les couches cachées sont identiques). Le nombre de poids du MLP est alors

$$n_{in}n + (l-1)n^2 + nn_{out}$$

et son nombre de biais est

$$nl + n_{out}$$

donc le nombre de paramètres total du MLP est

$$(l-1)n^2 + (n_{in} + l + n_{out})n + n_{out}.$$

Fonction de coût hybride Le choix de la fonction de coût est crucial et dépend de la nature des objets prédits. Les fonctions de coût les plus couramment utilisées sont la MSE et la MAE.

Leur différence réside dans le fait que la MSE pénalise quadratiquement l'erreur. Elle est donc fortement sensible aux valeurs aberrantes : une erreur de 10 compte autant que cent erreurs de 1. La MSE est donc une bonne fonction de coût pour capturer l'allure générale du phénomène, car un résultat incohérent serait très fortement pénalisé.

Le principal défaut de la MSE est qu'elle sous-estime les petites erreurs. Elle ne permet donc pas d'atteindre une grande finesse, contrairement à la MAE qui prend en compte les erreurs de manière proportionnelle.

Ainsi, utiliser la MSE permet d'obtenir rapidement une solution raisonnable, et la MAE est utile pour affiner cette solution et corriger les détails erronés. C'est pourquoi nous faisons le choix d'utiliser une fonction de coût hybride de la forme

$$\mathcal{C}(y, \hat{y}) = f_\alpha(x) \text{MAE}(y, \hat{y}) + (1 - f_\alpha(x)) \text{MSE}(y, \hat{y})$$

$$\text{où } x = \frac{\text{epoch}}{\text{epoch}_{\max}} \text{ et } f_\alpha(x) = \frac{1}{1 + \exp(-2\alpha(x - \frac{1}{\alpha}))}.$$

Le terme $f_\alpha(x) \in [0, 1]$ (voir figure 31) permet de gérer l'équilibre entre la pénalisation des grandes erreurs et l'affinage des détails. Il semble cohérent de favoriser la MSE en début d'entraînement, pour rapidement capturer la structure principale, puis d'effectuer une transition progressive vers la MAE de manière à affiner les profils prédits en fin d'entraînement.

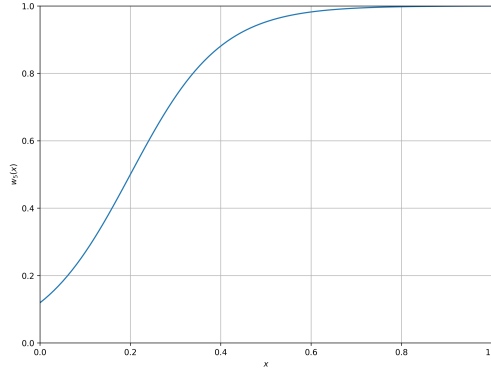


FIGURE 31 – $x \mapsto f_5(x)$

Régularisation Les réseaux de neurones sont des outils puissants. Un risque associé est le sur-apprentissage (*overfitting*), c'est-à-dire l'adaptation parfaite aux données d'entraînement qui empêche la généralisation à des données inconnues. La régularisation consiste à éviter cet écueil.

Un premier levier consiste à ajouter un terme de régularisation à la fonction de coût, dont le rôle est de pénaliser des paramètres dont la valeur apprise est trop importante. Ainsi, on utilisera une fonction de coût de la forme

$$\mathcal{C} = f_\alpha(x)\text{MAE} + (1 - f_\alpha(x))\text{MSE} + \mathcal{R}(w, b)$$

où \mathcal{R} est le terme de pénalisation. Deux principales méthodes sont employées :

— la pénalisation ridge :

$$\mathcal{R}(\mathbf{W}, \mathbf{B}) = \sum_{l,j,k} W_{jk}^{(l)2} + \sum_{l,j} b_j^{(l)2}$$

— la pénalisation lasso :

$$\mathcal{R}(\mathbf{W}, \mathbf{B}) = \sum_{l,j,k} |W_{jk}^{(l)}| + \sum_{l,j} |b_j^{(l)}|$$

où $\mathbf{W} = (W^{(0)}, \dots, W^{(l)})$ sont les matrices de poids du réseau à l couches et $\mathbf{B} = (\mathbf{b}^{(0)}, \dots, \mathbf{b}^{(l)})$ sont les vecteurs de biais.

La pénalisation ridge favorise des poids petits et distribués et encourage la stabilité du modèle. C'est cette régularisation que nous utilisons. Quant à la pénalisation lasso, elle favorise la sparsité en contraignant certains paramètres à devenir nul, ce qui est plutôt utile pour la sélection de caractéristiques et que nous n'utiliserons pas ici.

Un second levier est le *dropout*, qui consiste à oublier aléatoirement certains neurones au cours de l'entraînement, pour empêcher le réseau de trop dépendre de certains neurones.

Taux d'apprentissage Le taux d'apprentissage (*learning rate*) γ détermine la quantité dont sont modifiés les paramètres du MLP (poids et biais) lors d'une itération de l'algorithme du gradient :

$$w, b \leftarrow w, b - \gamma \nabla_{w,b} \mathcal{C}.$$

Un taux d'apprentissage élevé accélère l'entraînement, car les paramètres sont actualisés plus rapidement. Toutefois, si le *learning rate* est trop important, le réseau de neurones peut osciller autour d'un minimum de la fonction de coût sans jamais pouvoir l'atteindre.

Pour trouver un compromis, il est intéressant d'utiliser un planificateur de taux d'apprentissage (*learning rate scheduler*). Étant donné un taux d'apprentissage initial, le *scheduler* détecte les plateaux de la fonction de coût (signe que l'on oscille autour d'un minimum) pour diminuer progressivement le taux d'apprentissage, jusqu'à ce que la minimisation reprenne.

5.4.3 Optimisation des hyperparamètres par validation croisée

Il est important de faire la distinction entre les différents paramètres d'un réseau de neurones :

- les paramètres optimisables, qui sont modifiés au cours de l'entraînement du modèle par un processus d'optimisation de type descente de gradient (pour un MLP : les biais et les poids) ;
- les hyperparamètres, qui sont choisis en amont puis fixés tout au long de l'entraînement.

Les hyperparamètres peuvent être nombreux et ils caractérisent notamment l'architecture du réseau et la stratégie d'entraînement.

Pour notre métamodèle, on peut identifier les hyperparamètres suivants :

- architecture : taille des entrées, taille des sorties, nombre de couches cachées, nombre de neurones par couche, fonction d'activation ;
- entraînement : nombre d'epochs, taille de batch ;
- mesure d'erreur : fonction de coût, régularisation en norme, valeur de troncature des gradients ;
- taux d'apprentissage : *learning rate* initial, *learning rate* minimal...

Même si les hyperparamètres sont fixés pendant l'entraînement, leur choix est crucial pour garantir l'efficacité du modèle. Ils sont le plus souvent choisis de manière heuristique, mais il existe des méthodes quantitatives permettant de guider ce choix. L'idée générale est d'utiliser l'ensemble de validation pour tester différentes configurations d'hyperparamètres.

L'inconvénient de l'ensemble de validation est qu'il est souvent de taille modeste (typiquement 20 à 25% de l'ensemble des données) et donc qu'il présente le risque de manquer de variété. Une solution pour pallier à ce risque consiste à faire varier les données qui constituent l'ensemble de validation. Pour une même configuration d'hyperparamètres, on réalise plusieurs entraînements en changeant l'ensemble de validation. Puis, on calcule la moyenne de toutes les fonctions de coût obtenues, ce qui permet d'éviter le biais de la petite taille de l'ensemble de validation.

On appelle cette technique la validation croisée (*crossvalidation*) et, si elle permet effectivement de s'affranchir de la potentielle mauvaise représentabilité de l'ensemble de validation, elle est très coûteuse en calculs puisqu'elle nécessite de nombreux entraînements. Lors du choix des hyperparamètres, on limite donc généralement le nombre d'epochs.

Un aspect clé à considérer est que les hyperparamètres ne peuvent pas être choisis isolément : ils s'influencent entre eux et il est donc nécessaire de choisir des combinaisons d'hyperparamètres. Prenons l'exemple du nombre de couches cachées et du nombre de neurones par couche : il est évident que les choix de ces deux paramètres ne sont pas dissociables. Nous devons donc choisir un point d'un hypercube de dimension assez élevée (nous avons identifié une dizaine d'hyperparamètres). Étant donné le coût de la validation croisée, nous devons choisir certains hyperparamètres heuristiquement et les fixer tout au long de l'étude.

Nous choisissons d'utiliser la *crossvalidation* pour quatre hyperparamètres : la taille de batch et le taux d'apprentissage d'une part, puis le nombre de couches cachées et le nombre de neurones par couche dans un second temps.

bs \ lr	1e-4	3e-4	5e-4	1e-3
128	0.13	0.11	0.11	0.10
256	0.13	0.11	0.12	0.10
512	0.15	0.13	0.12	0.13
1024	0.18	0.15	0.15	0.13

TABLE 7 – Fonction de coût sur l'ensemble de validation en fonction de la taille de batch (bs) et du taux d'apprentissage (lr)

Le tableau 7 résume les résultats de la première étape de *crossvalidation*, visant à choisir une taille de batch et un taux d'apprentissage initial. Les meilleurs résultats sont obtenus avec une taille de batch de 128 et un taux d'apprentissage de 10^{-3} . La *batch size* obtenue est assez faible au vu de la taille de la base de données, ce qui a pour conséquence d'augmenter le temps d'entraînement. En effet, les paramètres du réseau de neurones pourront être ajustés plus de 2.700 fois par epoch. En revanche, des batchs plus petits permettent d'ajuster plus finement les paramètres en évitant de gommer les contributions de chaque échantillon par un moyennage trop large. Le taux d'apprentissage initial retenu est relativement important, ce qui permet un apprentissage efficace pendant les premiers epochs, et le *learning rate scheduler* permettra de le faire diminuer lorsque les variations de la fonction de coût se feront plus subtiles.

nl \ nn	512	1024	2048	4096
2	0.16	0.15	0.15	0.14
3	0.11	0.11	0.10	0.10
4	0.11	0.10	0.09	0.09
5	0.12	0.09	0.10	0.10

TABLE 8 – Fonction de coût sur l'ensemble de validation en fonction du nombre de couches cachées (nl) et du nombre de neurones par couche (nn)

Une fois fixés la taille de batch et le *learning rate* initial, la deuxième étape de validation croisée a permis de choisir le nombre de couches cachées et le nombre de neurones par couche. Au vu des résultats du tableau 8, nous choisissons un MLP de 4 couches cachées, avec 4.096 neurones chacune. Ce réseau de neurones possède plus de 50 millions de paramètres. En comparaison, un réseau de neurones d'environ 15.000 paramètres est illustré dans la figure 32. Cela permet d'imaginer la complexité de notre MLP, rendue nécessaire par la variété des profils magnétiques qu'il aura à prédire, et confirme l'importance des techniques de régularisation afin d'éviter l'*overfitting*.

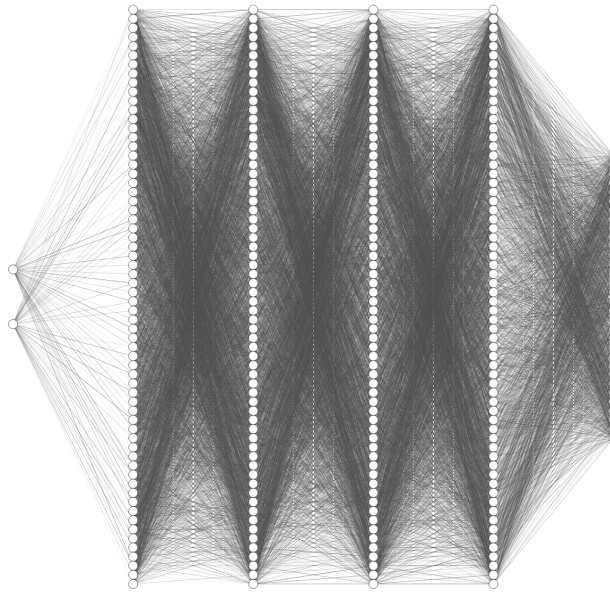


FIGURE 32 – Schéma représentant un réseau de neurones dense ($2 \rightarrow 64 \rightarrow 64 \rightarrow 64 \rightarrow 64 \rightarrow 32$)

6 Résultats

Métriques d'entraînement Nous avons entraîné notre métamodèle sur une base de données de plus de 350 000 profils magnétiques, pendant 5 000 epochs. La figure 33 présente l'évolution des *training* et *validation losses* au cours de l'entraînement. Malgré le très grand nombre de paramètres du réseau de neurones (plus de 50 millions) en comparaison de la taille de la base de données, nous n'avons pas considéré d'*overfitting* pendant l'entraînement. En effet, la fonction de coût est toujours restée plus faible sur l'ensemble de validation que sur l'ensemble d'entraînement. Cela prouve que les techniques de régularisation présentées dans la section 5.4.2 ont correctement fonctionné.

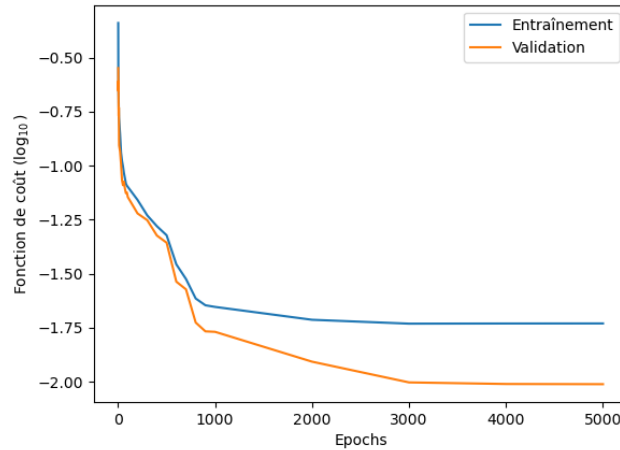


FIGURE 33 – Évolution des fonctions de coût calculées sur l'ensemble d'entraînement (en bleu) et l'ensemble de validation (en orange), en fonction du nombre d'epochs

L'erreur finale obtenue sur l'ensemble de validation est d'environ $9.5 \cdot 10^{-3}$. Au vu de la fonction de coût hybride utilisée (voir la section 5.4.2), il s'agit en fin d'entraînement d'une *mean absolute error*.

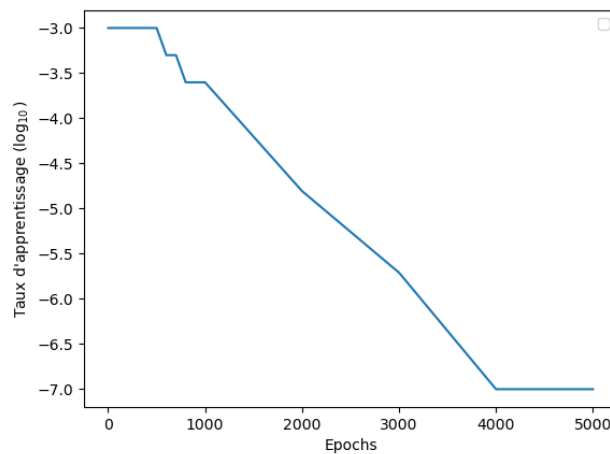
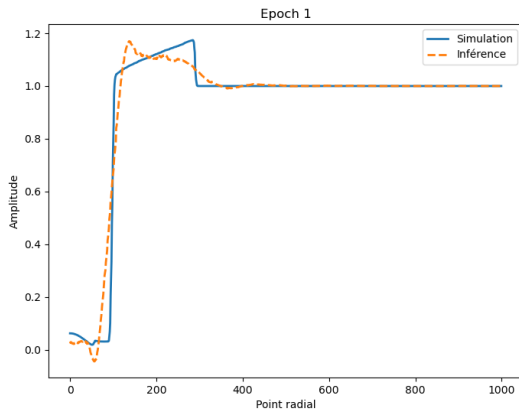


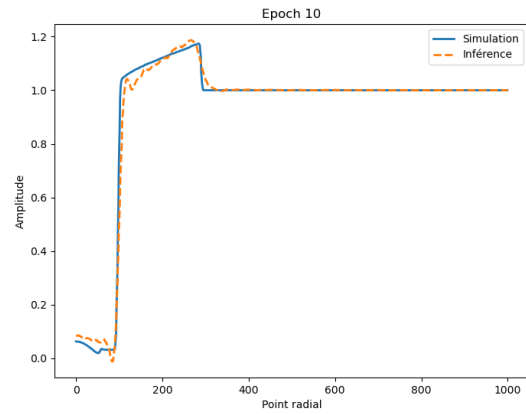
FIGURE 34 – Évolution du taux d'apprentissage en fonction du nombre d'epochs

Comme le montre la figure 34, le *learning rate scheduler* a permis de passer d'un taux d'apprentissage initial de 10^{-3} à un taux d'apprentissage final de 10^{-7} , et donc d'atteindre un minimum local très fin de la fonction de coût.

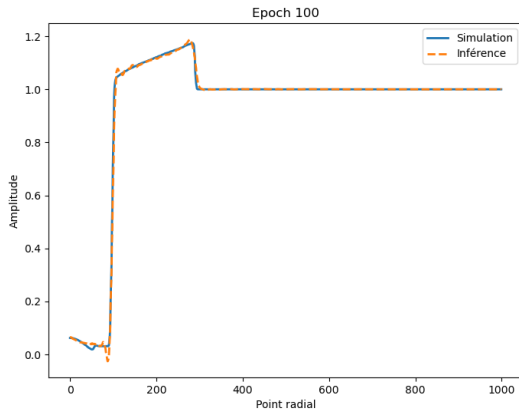
Comparaison des profils magnétiques La visualisation de l'évolution de la prédiction du modèle sur un même profil (figure 35) permet d'étudier le mécanisme d'entraînement. Après seulement 1 epoch, le modèle a capturé l'allure générale du profil (rappelons qu'en début d'entraînement, la fonction de coût est principalement une MSE). Après 10 epochs, la partie la plus simple du profil (le champ ambiant) est prédite avec précision. La suite de l'entraînement permet d'affiner l'inférence, à mesure que la fonction de coût évolue vers la MAE.



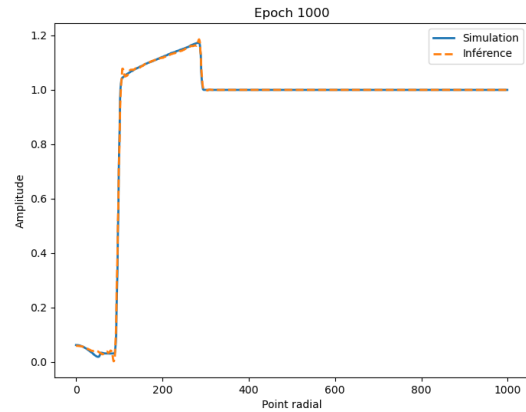
(a) Epoch 1 ($f_\alpha \approx 0.12$)



(b) Epoch 10 ($f_\alpha \approx 0.12$)



(c) Epoch 100 ($f_\alpha \approx 0.14$)



(d) Epoch 1000 ($f_\alpha = 0.5$)

FIGURE 35 – Évolution de la prédiction d'un profil magnétique de l'ensemble de validation en fonction du nombre d'epochs

La figure 36 montre qu'en fin d'entraînement, le profil réel est complètement reproduit par le modèle. Seules quelques imperfections subsistent, au niveau des forts gradients.

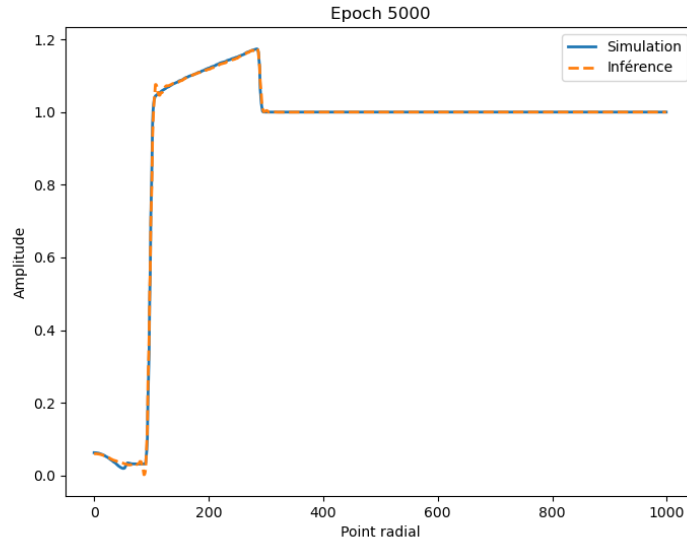


FIGURE 36 – Prédiction finale du métamodèle

Comparaison des cartes magnétiques En inférant le modèle avec les mêmes paramètres physiques à des pas de temps différents, on peut reconstituer des cartes magnétiques, qui représentent l'évolution de l'amplitude du champ magnétique dans l'espace et en fonction du temps. Cela permet de confirmer que non seulement le réseau de neurones est capable de prédire correctement un profil magnétique donné, mais qu'en plus les résultats qu'il fournit ont une cohérence temporelle. En comparant à la même carte magnétique obtenue par simulation, on constate que l'allure générale est très bien reproduite; les principales erreurs se situent au niveau des forts gradients (fronts de choc avant et arrière).

Il faut noter que certains des profils de cette carte magnétique étaient dans l'ensemble d'entraînement. Cela est dû au tri aléatoire de notre base de données effectué avant de constituer les ensembles d'entraînement et de validation. Dans la figure 37, seulement 21% des profils font partie de l'ensemble de validation. On peut toutefois se rassurer en remarquant que l'on ne distingue pas de variation temporelle brutale de l'erreur, ce qui signifie que les performances du modèle sont aussi bonnes sur le *validation set* que sur le *training set*.

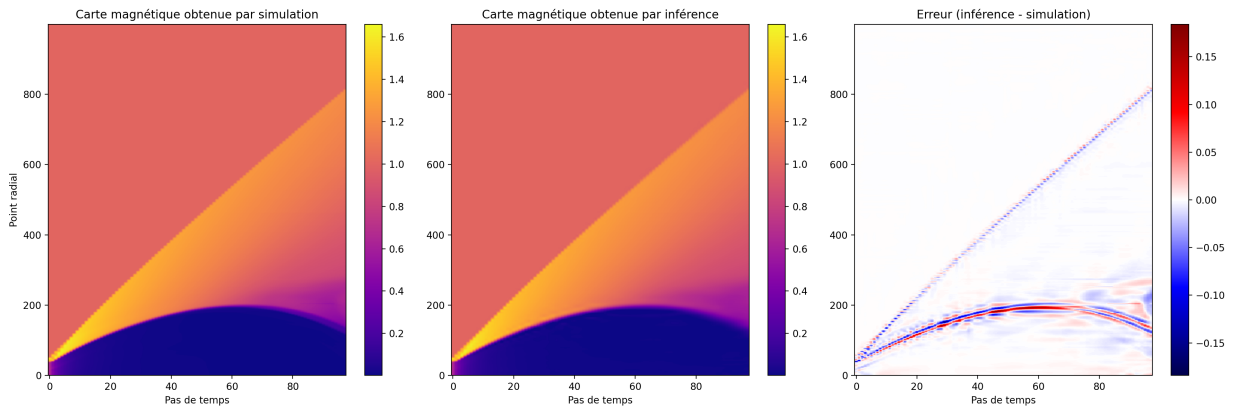


FIGURE 37 – Comparaison d'une carte magnétique prédite par apprentissage automatique à la carte magnétique obtenue par simulation (21% des profils dans l'ensemble de validation)

Domaine de validité L'évaluation des performances du métamodèle sur l'ensemble de validation permet de déterminer le domaine de validité du réseau de neurones pour des utilisations ultérieures. La figure 38 représente l'erreur moyenne par profil en fonction d'un des paramètres d'entrée du réseau de neurones. Elle montre aussi en arrière-plan le nombre de profils disponibles pour l'entraînement. On constate que même lorsque moins de données d'entraînement sont disponibles, l'erreur reste acceptable, ce qui fait du métamodèle un outil fiable pour explorer de vastes gammes de paramètres.

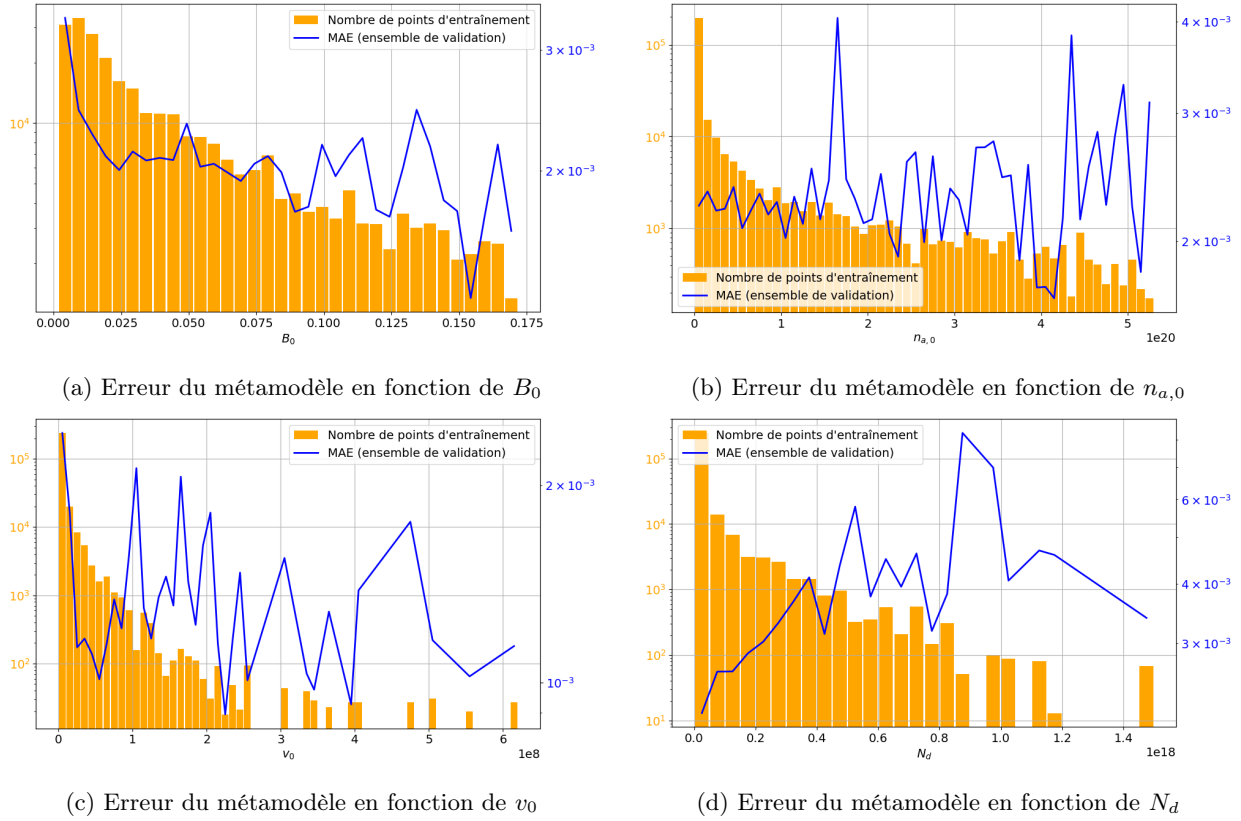


FIGURE 38 – Erreur du métamodèle en fonction des paramètres physiques d'entrée et nombre de points d'entraînement

7 Application : formation des chocs

Nous disposons d'un outil fiable permettant d'obtenir des résultats rapidement et dans de larges gammes de paramètres. En guise d'illustration, nous proposons une application de notre métamodèle aux critères de formation d'un choc à l'avant du front de compression d'une cavité diamagnétique super-alfvénique.

Les chocs sont décrits par les équations de Rankine-Hugoniot, qui imposent des relations entre les grandeurs du système (vitesse, densité, champ magnétique et pression) avant et après le choc. Les équations de Rankine-Hugoniot appliquées aux cavités diamagnétiques sont dérivées dans [3].

À partir des relations de Rankine-Hugoniot, [6] a défini trois critères permettant de caractériser la présence d'un choc à l'avant du front de compression d'une cavité diamagnétique :

- $M_A > 1$: la cavité doit relever du régime super-alfvénique. En effet, on sait que dans ce régime la compression magnétique se déplace à la vitesse $v_0 > v_A$ la vitesse d'Alfvén du plasma ambiant. Les ions, qui transportent la compression magnétique, sont plus rapides que la vitesse de propagation d'une onde dans le plasma ambiant. Un choc peut donc avoir lieu.
- La largeur du front de compression magnétique doit être inférieure à la longueur d'inertie des ions ambiants d_a . En effet, dans le cas contraire, le front serait suffisamment grand pour que les ions ambiants puissent s'y déplacer librement : on ne serait donc pas en présence d'un choc.
- La hauteur du front de compression magnétique doit être supérieur au nombre d'Alfvén-Mach M_A . Cette dernière condition découle directement des relations de Rankine-Hugoniot.

On s'attend donc à des fronts de compression magnétique fins et piqués. La figure 39 présente un profil magnétique qui répond à ces trois critères.

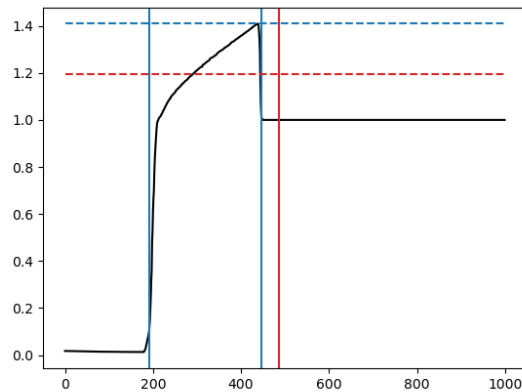


FIGURE 39 – Exemple de profil répondant aux critères de [6] pour la formation d'un choc (début et fin du front de compression en trait plein bleu, 1 longueur d'inertie ionique en trait plein rouge, maximum de compression en trait pointillé bleu et nombre d'Alfvén-Mach en trait pointillé rouge)

Plusieurs études ont été menées afin de déterminer, par la simulation, les conditions expérimentales dans lesquelles l'apparition de chocs est possible. Ces études préliminaires sont essentielles en vue de la réalisation d'expériences laser ultérieures. Une étude d'envergure de ce type a été menée dans [2] : de nombreuses simulations hybrides 2D ont été menées dans différents régimes afin de déterminer les gammes de paramètres correspondant à la formation d'un choc super-alfvénique. Les auteurs ont exploré des densités d'ions ambiants allant jusqu'à $4 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$, des vitesses d'expansion pouvant atteindre $5 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et des champs atteignant $7 \cdot 10^{-2} \text{ T}$. Nous nous proposons de reproduire cette étude paramétrique avec notre métamodèle entraîné.

Nous échantillonons finement l'espace paramétrique exploré dans l'article et inférons le réseau de neurones à chaque nouvelle configuration de paramètres. Cette phase est extrêmement rapide et présente donc un avantage décisif au regard du temps de calcul des simulations hybrides. Pour chaque simulation, le

nombre d'ions débris N_d est adapté afin de garder constante l'énergie cinétique initiale fournie par le laser :

$$N_d = \frac{2E_0}{m_d v_0^2}.$$

L'énergie est fixée à $E_0 = 250$ J dans toute l'étude. Nous choisissons d'inférer chaque profil magnétique au temps $t = 2t_0$ (avec t_0 défini en section 5.1). Ainsi, nous améliorons la fiabilité de la prédiction du réseau de neurones.

Pour chaque profil, nous vérifions d'abord s'il est conforme, au sens où il présente bien une zone de faible champ, puis un front de compression magnétique clairement délimité et enfin une zone de champ ambiant. Puis nous vérifions que le profil respecte les trois critères donnés ci-dessus.

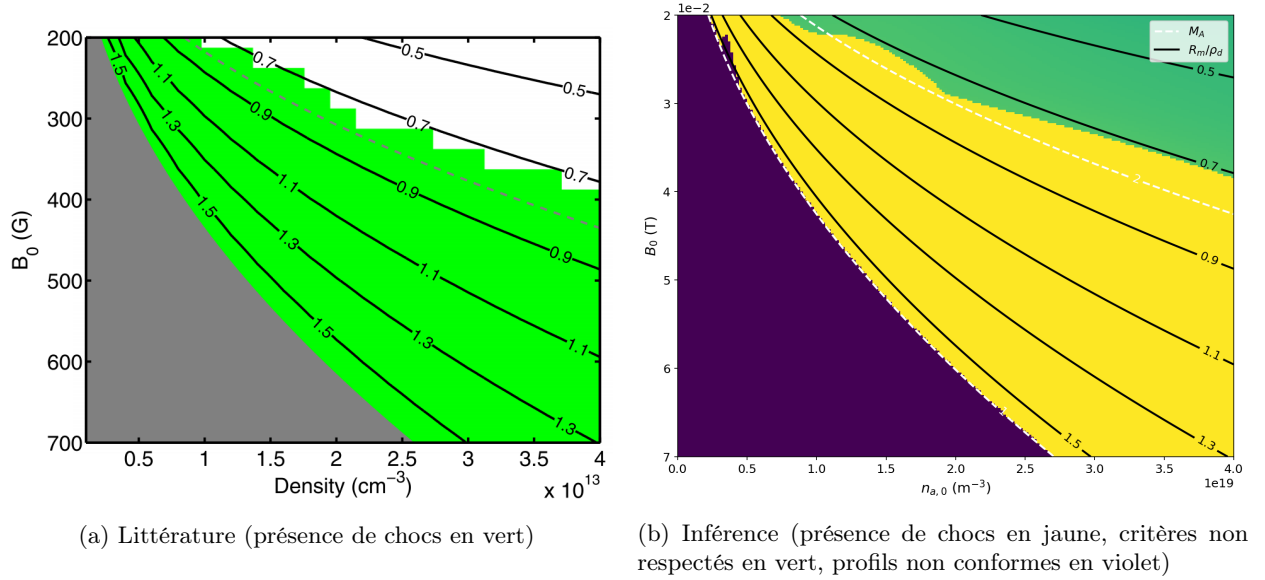
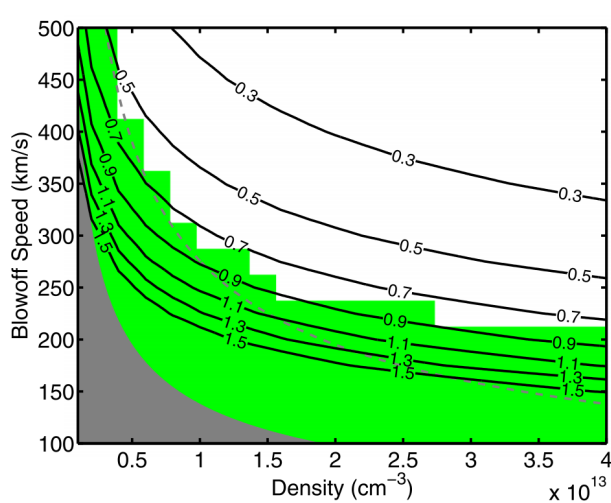
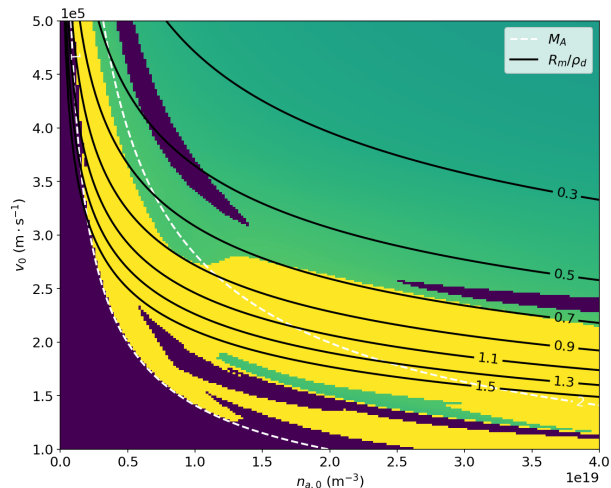


FIGURE 40 – Espace de paramètres permettant la formation de chocs (v_0 fixée à $3 \cdot 10^5$ m · s⁻¹)

Dans la figure 40, nous comparons les résultats de notre réseau de neurones avec ceux de la littérature, lorsque les paramètres $n_{a,0}$ et B_0 sont variés. Nous constatons un accord quasi-parfait. Les profils non conformes que nous détectons sont issus de cavités sub-alfvéniques (régime qui n'a pas été exploré dans [2]) et ne pourraient donc pas donner lieu à la formation d'un choc d'après les critères mentionnés précédemment. Nous retrouvons le même espace de paramètres pour la formation des chocs : $R_m/\rho_d > 0.7$ semble être une condition nécessaire. C'est vraisemblablement ce qui conduit les auteurs de [8] à imposer $\rho_d/R_m > \sqrt{2}$ dans leurs expériences. Notons toutefois que cette valeur dépend des paramètres de magnétisation (et donc des charges des espèces ioniques en présence) : l'hypothèse faite dans les simulations (et que nous avons reprise dans la figure 40 à titre de comparaison) est celle de l'expansion 2D d'ions C⁴⁺ dans un plasma d'hydrogène. Enfin, nous remarquons que la plupart du temps, c'est le critère portant sur la hauteur du front de compression, issu des relations de Rankine-Hugoniot, qui n'est pas respecté lorsque le choc ne se produit pas.



(a) Littérature (présence de chocs en vert)



(b) Inférence (présence de chocs en jaune, critères non respectés en vert, profils non conformes en violet)

FIGURE 41 – Espace de paramètres permettant la formation de chocs (B_0 fixé à $2 \cdot 10^{-2}$ T)

La figure 41 présente le même type de comparaison mais en faisant varier d'autres paramètres ($n_{a,0}$ et v_0). Là encore, nous retrouvons la même allure générale, mais avec quelques différences notables qu'il faut souligner. D'abord, nous constatons en accord avec la littérature qu'en régime sub-alfvénique, les chocs ne se forment pas. Lorsqu'un profil super-alfvénique ne produit pas de choc, c'est souvent le critère sur la hauteur du front de compression qui n'est pas respecté, comme dans la figure précédente. Toutefois nous détectons, avec la finesse du réseau de neurones, une proportion non négligeable de profils super-alfvéniques non conformes, en particulier pour de faibles vitesses d'expansion. À ces subtilités près, nous retrouvons sensiblement le même critère $R_m/\rho_d > 0.7$.

Ces comparaisons très concluantes entre les résultats issus de notre métamodèle et les données de la littérature permettent d'une part de nous assurer de la fiabilité du réseau de neurones, et d'autre part d'envisager son utilisation pour d'autres études paramétriques. En effet, le très faible coût de l'inférence du métamodèle permet d'envisager l'exploration fine de larges gammes de paramètres, inaccessibles à l'expérience ou trop coûteuses pour la simulation.

8 Conclusions et perspectives

Au cœur de l'interaction champ-plasma, les cavités diamagnétiques sont un phénomène complexe. Ce stage a été l'occasion de développer différentes techniques permettant de mieux l'appréhender.

D'abord, en nous plaçant dans le cadre de la MHD idéale, nous avons dégagé les principaux mécanismes qui régissent l'évolution d'une cavité diamagnétique. Nous avons distingué deux régimes, qui dépendent du nombre d'Alfvén-Mach du phénomène. Les deux processus dominants (transfert de l'énergie cinétique des débris vers le champ ou vers les ions ambiants) nous ont conduit à définir des rayons caractéristiques, qui donnent une estimation de la taille caractéristique de la cavité.

Puis nous avons calculé l'équation d'évolution du rayon de la cavité à l'aide de plusieurs hypothèses simplificatrices : à l'aide d'un bilan énergétique, et dans un second temps en nous appuyant sur un modèle hybride pour le cas spécifique des cavités super-alfvéniennes. Les résultats obtenus donnent un ordre de grandeur correct, malgré les simplifications. Ils ne suffisent toutefois pas à fournir des estimations quantitatives précises. Ils fournissent cependant les bonnes relations d'échelle et permettent de comprendre l'impact individuel de chaque paramètre physique. Nous avons comparé ces estimations avec des résultats de simulation MHD. Les simulations nous apprennent que ce sont principalement les instabilités se formant autour de la cavité qui causent l'implosion de celle-ci. Les simulations nous ont également apporté des résultats précieux sur la vitesse de propagation du front de compression magnétique, en fonction du régime.

Après cette approche du phénomène à l'interface entre théorie et simulation, nous avons généré une importante base de données de simulations, dans des gammes de paramètres pertinentes. Nous nous sommes appuyés sur les paramètres expérimentaux trouvés dans la littérature pour couvrir de manière large les différents régimes possibles. Nous avons construit une procédure d'adimensionnement permettant de transposer les résultats obtenus à des échelles très différentes : des lâchers de barium dans la magnétosphère terrestre aux expériences d'astrophysique de laboratoire. Nous avons mis en œuvre des procédures fiables pour éliminer les profils non-physiques de la base de données, afin de bénéficier d'un entraînement le plus stable possible pour notre métamodèle.

Nous avons ensuite entrepris la conception d'un réseau de neurones puissant, très complexe au vu de son important nombre de paramètres, rendu indispensable par la complexité du phénomène étudié. Nous avons développé des stratégies d'entraînement efficaces afin d'éviter le sur-apprentissage tout en atteignant la plus grande précision possible. Nous avons éprouvé le choix des hyperparamètres grâce à la validation croisée.

Nous avons confronté le réseau de neurones entraîné à plusieurs évaluations critiques de ses performances, en analysant l'évolution de la fonction de coût en cours d'entraînement, mais aussi en comparant la prédiction de profils magnétiques aux résultats de simulation. Afin de mettre à l'épreuve la cohérence temporelle des résultats obtenus par inférence, nous avons reconstitué avec succès des cartes magnétiques. Nous avons aussi évalué l'erreur moyenne par profil du métamodèle en faisant varier les paramètres d'entrée afin d'identifier les plages optimales d'utilisation. Nous disposons donc d'un réseau de neurones fiable, capable de fournir des résultats très précis à partir d'un nombre restreint de paramètres d'entrée. Le métamodèle peut reconstituer toute la durée de vie d'une cavité diamagnétique avec un accord très satisfaisant aux données de simulation.

Enfin, nous avons appliqué le métamodèle entraîné au problème de la formation des chocs dans les cavités super-alfvéniennes. Les résultats obtenus par inférence sont similaires à ceux présentés dans la littérature, issus de simulations hybrides. Cette application laisse entrevoir de nombreuses perspectives d'utilisation possibles, dont l'exploration rapide de gammes de paramètres potentiellement très variées.

Des améliorations du code de simulation permettraient de mieux capturer certains phénomènes. On peut notamment imaginer qu'un code MHD bi-fluide serait plus adapté à l'étude des cavités diamagnétiques qui fait intervenir deux populations ioniques. Pouvoir choisir les charges données à chacune des populations permettrait également d'encore se rapprocher des résultats de la littérature.

Des outils d'apprentissage automatique plus sophistiqués, tels que les méthodes d'ordre 2, les mécanismes d'attention ou les *Fourier Neural Networks* pourraient également permettre d'obtenir de meilleurs résultats, notamment au niveau des fortes variations du champ, plus difficilement prédites par notre métamodèle.

On peut néanmoins imaginer de nombreuses applications avec le réseau entraîné : études paramétriques, exploration de régimes difficilement accessibles à l'expérience, prédiction de scalaires (rayon maximal, temps d'expansion et d'implosion, etc.)

A Annexe

Paramètres physiques																			
	CRRES				Schaeffer 2015			Schaeffer 2017							Niemann				
	G2	G3	G4	G10	R1	R2	R3	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E1	E2	E3	E4	E5
B_0	5e-6	1e-6	3e-7	1e-7	3e-2	2e-2	3e-2	6e-2	3e-2	3e-2	2e-2	2e-2	3e-2	4e-2	3e-2	3e-2	6e-2	2e-1	3e-2
$n_{a,0}$	7e11	3e10	2e9	4e8	5e18	5e18	1e19	2e18	2e18	5e18	5e18	5e18	1e19	5e19	9e17	9e17	9e17	9e17	9e17
v_0	1e4	1e4	1e4	1e4	4e5	3e5	4e5	2e5	4e5	4e5	3e5	2e5	4e5	5e4	5e5	4e5	5e5	5e5	5e5
N_d	1e19	3e18	1e18	3e18	5e15	1e16	1e16	5e15	2e16	8e18	1e17	1e17	1e17	7e16	1e15	1e15	1e15	1e15	1e15
Paramètres caractéristiques adimensionnels																			
	CRRES				Schaeffer 2015			Schaeffer 2017							Niemann				
	G2	G3	G4	G10	R1	R2	R3	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E1	E2	E3	E4	E5
ρ_a/L	6e0	3e1	1e2	2e2	8e2	3e2	2e2	5e2	3e2	1e3	4e2	2e3	2e2	1e3	9e2	9e2	4e2	1e2	5e3
d_a/L	3e-3	1e-2	6e-2	1e-1	3e-1	2e-1	1e-1	8e-1	5e-1	6e-1	3e-1	6e-1	1e-1	1e-1	1e0	1e0	1e0	1e0	2e0
M_A	1e-1	1e-1	1e-1	1e-1	3e0	1e0	2e0	3e-1	1e0	3e0	1e0	2e0	2e0	2e0	2e0	1e0	7e-1	2e-1	4e0
ρ_a/R_*	3e2	5e2	7e2	5e2	4e3	1e3	9e2	2e3	6e2	4e2	6e2	2e3	5e2	3e3	4e3	4e3	2e3	7e2	2e4
Paramètres caractéristiques adimensionnels en \log_{10}																			
	CRRES				Schaeffer 2015			Schaeffer 2017							Niemann				
	G2	G3	G4	G10	R1	R2	R3	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E1	E2	E3	E4	E5
ρ_a/L	0.8	1	2	2	3	2	2	3	3	3	3	3	2	3	3	3	3	2	4
d_a/L	-3	-2	-1	-1	-0.5	-0.8	-1	-0.09	-0.3	-0.2	-0.5	-0.2	-0.8	-0.9	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	0.3
M_A	-1	-1	-1	-1	0.4	0.1	0.3	-0.5	-0.01	0.6	0.1	0.4	0.3	0.2	0.2	0.04	-0.1	-0.6	0.5
ρ_a/R_*	2	3	3	3	4	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	3	3	4

TABLE 9 – Paramètres physiques et adimensionnels issus des expériences de la littérature ([4], [5], [6], [8])

Références

- [1] BASHURIN, V. P., GOLUBEV, A. I., AND TEREKHIN, V. A. The collisionless deceleration of an ionized cloud dispersing in a uniform plasma in a magnetic field. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* 24, 5 (1 1984), 614–620.
- [2] CLARK, S. E., WINSKE, D., SCHAEFFER, D. B., EVERSON, E. T., BONDARENKO, A. S., CONSTANTIN, C. G., AND NIEMANN, C. Hybrid simulation of shock formation for super-Alfvénic expansion of laser ablated debris through an ambient, magnetized plasma. *Physics of Plasmas* 20, 8 (8 2013).
- [3] CRUZ, F. D., SCHAEFFER, D. B., CRUZ, F., AND SILVA, L. O. Strong collisionless coupling between an unmagnetized driver plasma and a magnetized background plasma. *Physics of Plasmas* 30, 5 (5 2023).
- [4] HUBA, J. D., BERNHARDT, P. A., AND LYON, J. G. Preliminary study of the CRRES magnetospheric barium releases. *Journal of Geophysical Research Atmospheres* 97, A1 (1 1992), 11–24.
- [5] NIEMANN, C., GEKELMAN, W., CONSTANTIN, C. G., EVERSON, E. T., SCHAEFFER, D. B., CLARK, S. E., WINSKE, D., ZYLSTRA, A. B., PRIBYL, P., TRIPATHI, S. K. P., LARSON, D., GLENZER, S. H., AND BONDARENKO, A. S. Dynamics of exploding plasmas in a large magnetized plasma. *Physics of Plasmas* 20, 1 (1 2013).
- [6] SCHAEFFER, D. B., EVERSON, E. T., BONDARENKO, A. S., CLARK, S. E., CONSTANTIN, C. G., WINSKE, D., GEKELMAN, W., AND NIEMANN, C. Experimental study of subcritical laboratory magnetized collisionless shocks using a laser-driven magnetic piston. *Physics of Plasmas* 22, 11 (11 2015).
- [7] SCHAEFFER, D. B., EVERSON, E. T., WINSKE, D., CONSTANTIN, C. G., BONDARENKO, A. S., MORTON, L. A., FLIPPO, K. A., MONTGOMERY, D. S., GAILLARD, S. A., AND NIEMANN, C. Generation of magnetized collisionless shocks by a novel, laser-driven magnetic piston. *Physics of Plasmas* 19, 7 (7 2012).
- [8] SCHAEFFER, D. B., WINSKE, D., LARSON, D. J., COWEE, M. M., CONSTANTIN, C. G., BONDARENKO, A. S., CLARK, S. E., AND NIEMANN, C. On the generation of magnetized collisionless shocks in the large plasma device. *Physics of Plasmas* 24, 4 (3 2017).
- [9] VALENZUELA, A., HAERENDEL, G., FÖPPL, H., MELZNER, F., NEUSS, H., RIEGER, E., STÖCKER, J., BAUER, O., HÖFNER, H., AND LOIDL, J. The AMPTE artificial comet experiments. *Nature* 320, 6064 (4 1986), 700–703.
- [10] WINSKE, D., AND GARY, S. P. Hybrid simulations of debris-ambient ion interactions in astrophysical explosions. *Journal of Geophysical Research Atmospheres* 112, A10 (10 2007).
- [11] WINSKE, D., HUBA, J. D., NIEMANN, C., AND LE, A. Recalling and Updating Research on Diamagnetic Cavities : Experiments, Theory, Simulations. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences* 5 (1 2019).

Remerciements

Je remercie chaleureusement l'équipe du CEA pour son accueil et pour l'environnement de travail stimulant offert tout au long de ce stage. Je tiens tout particulièrement à remercier Renaud FERRAND pour sa confiance, ainsi que pour son encadrement, sa disponibilité et ses conseils avisés. Je remercie également Benoît BERNECKER et l'ensemble de l'équipe. Mes remerciements vont aussi à Alixende KOULMANN pour nos nombreuses discussions enrichissantes autour de la physique, ainsi qu'à Gabriel BARREAU pour son aide précieuse concernant l'utilisation du code de simulation. Enfin, je remercie l'ensemble des doctorants, post-doctorants, alternants et stagiaires pour l'ambiance bienveillante et la richesse des échanges scientifiques et humains partagés.