Ondes magnétohydrodynamiques

Clément Mazzocchi

Septembre 2025

Table des matières

Nous allons mettre en évidence les effets d'une petite perturbation dans le plasma. Nous considérerons uniquement des systèmes MHD idéaux et inviscides. Le système MHD contient quatre inconnues : la masse volumique ρ_m, la vitesse $\mathbf{u}$, la pression P et le champ magnétique $\mathbf{B}$. Pour chacune de ces inconnues, nous allons considérer un champ d'équilibre (stationnaire et uniforme) perturbé d'une petite quantité :

$$\rho_m = \rho_{m,0} + \rho_{m,1} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \qquad P = P_0 + P_1 \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$$

Nous allons injecter ces champs dans les équations de la MHD et les linéariser à l'ordre 1, c'est-à-dire négliger tous les produits croisés de termes perturbatifs. Notre objectif sera alors de déterminer la relation de dispersion de l'onde considérée.

1 MHD standard

Nous commençons par considérer la MHD standard, dans laquelle nous négligeons l'effet Hall.

1.1 Régime incompressible : ondes d'Alfvén

Pour commencer, considérons le système MHD incompressible (donc ici $\rho_{m,1} = 0$), idéal et inviscide sans effet Hall :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \left(\dfrac{P}{\rho_{m,0}} + \dfrac{b^2}{2} \right) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{b} \\ \dfrac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \end{cases}$$

Comme on est en MHD incompressible, la pression est déterminée par les autres champs (on peut le voir en appliquant l'opérateur divergence à l'équation de conservation de l'impulsion). Ici, le terme de pression totale ne dépend que de termes non-linéaires, si bien que nous pouvons l'oublier. En injectant les champs perturbés et en linéarisant, nous obtenons

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla)\mathbf{b}_1 \\ \dfrac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial t} = (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1 \\ \nabla \cdot \mathbf{b}_1 = 0 \end{cases}$$

Passons dans l'espace de Fourier pour trouver la relation de dispersion :

$$\begin{cases} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \\ -i\omega \mathbf{u}_1 = (\mathbf{b}_0 \cdot i\mathbf{k})\mathbf{b}_1 \\ -i\omega \mathbf{b}_1 = (\mathbf{b}_0 \cdot i\mathbf{k})\mathbf{u}_1 \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_1 = 0 \end{cases}$$

La première et la dernière équation montrent que l'onde est transverse : les perturbations de la vitesse et du champ magnétique sont orthogonales à la direction de propagation. Des deux autres équations, on obtient la relation de dispersion suivante :

$$\boxed{\omega^2 = (\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{k})^2}$$

Il s'agit des ondes d'Alfvén. Si la perturbation est transversale à $\mathbf{b}_0$, on parle d'onde d'Alfvén de cisaillement. Si au contraire la perturbation est parallèle à $\mathbf{b}_0$, on parle de peuso-onde d'Alfvén.

1.2 Régime compressible : ondes magnétosonores

Considérons à présent le système MHD compressible, idéal et inviscide, sans effet Hall.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) = 0 \\ \rho_m \left(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \dfrac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0} \\ \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

Nous avons besoin d'une équation de fermeture pour la pression pour clôre le système. Nous choisirons une fermeture polytropique :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\gamma \frac{P}{\rho_m} \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u})$$

On voit aisément que $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \dfrac{\nabla(B^2)}{2}$. D'autre part, $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u})$. Linéarisons le système autour des champs d'équilibre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_{m,1}}{\partial t} + \rho_{m,0} \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \\ \rho_{m,0} \dfrac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla P_1 - \dfrac{\nabla(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1)}{\mu_0} + \dfrac{(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{B}_1}{\mu_0} \\ \dfrac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1 - \mathbf{B}_0(\nabla \cdot \mathbf{u}_1) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\gamma P_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1$$

Comme dans le cas incompressible, on peut utiliser des champs normalisés :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho_{m,0}} \dfrac{\partial \rho_{m,1}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\dfrac{\nabla P_1}{\rho_{m,0}} - \nabla(\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_1) + (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla)\mathbf{b}_1 \\ \dfrac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial t} = (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1 - \mathbf{b}_0(\nabla \cdot \mathbf{u}_1) \\ \nabla \cdot \mathbf{b}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\rho_{m,0}} \frac{\partial P_1}{\partial t} = -\gamma \frac{P_0}{\rho_{m,0}} \nabla \cdot \mathbf{u}_1$$

Passons dans l'espace de Fourier :

$$\begin{cases} -i\omega \dfrac{\rho_{m,1}}{\rho_{m,0}} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \\ -i\omega \mathbf{u}_1 = -i\mathbf{k} \dfrac{P_1}{\rho_{m,0}} - i\mathbf{k}(\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_1) + (\mathbf{b}_0 \cdot i\mathbf{k})\mathbf{b}_1 \\ -i\omega \mathbf{b}_1 = (\mathbf{b}_0 \cdot i\mathbf{k})\mathbf{u}_1 - \mathbf{b}_0(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1) \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_1 = 0 \end{cases}$$

$$-i\omega \frac{P_1}{\rho_{m,0}} = -\gamma \frac{P_0}{\rho_{m,0}} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1$$

D'une part, l'équation d'état sur la pression se réécrit

$$\omega P_1 = \rho_{m,0} c_s^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1$$

où $c_s = \sqrt{\dfrac{\gamma P_0}{\rho_{m,0}}}$ est la vitesse du son. D'autre part, l'équation sur le champ magnétique se réécrit

$$\omega \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1) - (\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{k})\mathbf{u}_1$$

Enfin, l'équation sur l'impulsion se réécrit

$$\omega \mathbf{u}_1 = \mathbf{k} \left(\frac{P_1}{\rho_{m,0}} + \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_1 \right) - (\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{k})\mathbf{b}_1$$

Injectons les deux premières relations dans la troisième :

$$(\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_0)^2)\mathbf{u}_1 = ((c_s^2 + b_0^2)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1) - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{b}_0)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_0))\mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_0)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{b}_0$$

Posons $\mathbf{b}_0 = b_0 \mathbf{e}_z$. On peut décomposer $\mathbf{k} = k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z$. On a alors

$$(\omega^2 - k_z^2 b_0^2)\mathbf{u}_1 = ((c_s^2 + b_0^2)(k_y u_{1,y} + k_z u_{1,z}) - u_{1,z} k_z b_0^2)\mathbf{k} - k_z b_0 (k_y u_{1,y} + k_z u_{1,z})\mathbf{b}_0$$

ce qui donne le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - k_z^2 b_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 - k_y^2 c_s^2 - k^2 b_0^2 & -k_y k_z c_s^2 \\ 0 & -k_y k_z c_s^2 & \omega^2 - k_z^2 c_s^2 \end{pmatrix} \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$$

Le déterminant de cette matrice doit s'annuler pour avoir une solution non triviale :

$$(\omega^2 - k_z^2 b_0^2)(\omega^4 - (c_s^2 + b_0^2)k^2\omega^2 + k^2 c_s^2 k_z^2 b_0^2) = 0$$

Cela conduit à trois solutions :

$$\boxed{\begin{cases} \omega^2 = k_z^2 b_0^2 \\ \omega^2 = \dfrac{k^2}{2}\left(c_s^2 + b_0^2 + \sqrt{(c_s^2+b_0^2)^2 - 4c_s^2 b_0^2 \dfrac{k_z^2}{k^2}}\right) \\ \omega^2 = \dfrac{k^2}{2}\left(c_s^2 + b_0^2 - \sqrt{(c_s^2+b_0^2)^2 - 4c_s^2 b_0^2 \dfrac{k_z^2}{k^2}}\right) \end{cases}}$$

On retrouve bien sûr l'onde d'Alfvén du régime incompressible. Les deux autres modes sont appelés ondes magnétosonores, rapide et lente respectivement.

On peut s'attarder sur deux cas particuliers :

— Si $\mathbf{k} \propto \mathbf{e}_z$, alors $k = k_z$. On trouve alors

$$\begin{cases} \omega^2 = c_s^2 k^2 \\ \omega^2 = k^2 b_0^2 \end{cases}$$

Ainsi, le mode rapide est une simple onde sonore et le mode lent est dégénéré avec l'onde d'Alfvén.

— Si $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_z = 0$, alors $k_z = 0$. Dans ce cas, seul le mode rapide subsiste et on obtient

$$\omega^2 = (c_s^2 + b_0^2)k^2$$

Il s'agit d'une onde sonore modifiée.

2 MHD Hall

On prend maintenant en compte l'effet Hall qui, comme on va le voir, complexifie beaucoup les relations de dispersion.

2.1 Régime incompressible : ondes hélicitaires

Le système considéré est le suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \left(\dfrac{P}{\rho_{m,0}} + \dfrac{b^2}{2}\right) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{b} \\ \dfrac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u} - d\nabla \times ((\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}) \\ \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \end{cases}$$

Là encore, la pression n'interviendra pas. En injectant les champs perturbés et en linéarisant, nous obtenons

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla)\mathbf{b}_1 \\ \dfrac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial t} = (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1 - d\nabla \times ((\nabla \times \mathbf{b}_1) \times \mathbf{b}_0) \\ \nabla \cdot \mathbf{b}_1 = 0 \end{cases}$$

Passons dans l'espace de Fourier pour trouver la relation de dispersion :

$$\begin{cases} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \\ -i\omega \mathbf{u}_1 = (\mathbf{b}_0 \cdot i\mathbf{k})\mathbf{b}_1 \\ -i\omega \mathbf{b}_1 = (\mathbf{b}_0 \cdot i\mathbf{k})\mathbf{u}_1 + d\mathbf{k} \times ((\mathbf{k} \times \mathbf{b}_1) \times \mathbf{b}_0) \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_1 = 0 \end{cases}$$

Là encore, la première et la dernière équation montrent que l'onde est transverse.

L'équation sur l'impulsion se réécrit

$$\omega \mathbf{u}_1 = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_0)\mathbf{b}_1$$

et en utilisant une relation de calcul vectoriel, l'équation sur le champ magnétique prend la forme

$$\omega \mathbf{b}_1 = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_0)\mathbf{u}_1 + id(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_0)(\mathbf{k} \times \mathbf{b}_1)$$

En combinant ces deux relations, on obtient la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2 \mathbf{b}_1 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_0)^2 \mathbf{b}_1 + id\omega(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_0)(\mathbf{k} \times \mathbf{b}_1)$$

On peut là encore considérer $\mathbf{b}_0 = b_0 \mathbf{e}_z$ et poser $\mathbf{k} = k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z$. La relation de dispersion devient alors

$$(\omega^2 - b_0^2 k_z^2)\mathbf{b}_1 = idb_0 k_z \omega(\mathbf{k} \times \mathbf{b}_1)$$

Pour simplifier cette relation, il faut introduire les vecteurs hélicitaires complexes que nous allons maintenant définir. Posons d'abord $\mathbf{e}_k = \dfrac{\mathbf{k}}{k}$, $\mathbf{e}_\phi = \dfrac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_k}{|\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_k|}$ et $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_k$. On définit alors les vecteurs hélicitaires :

$$\mathbf{h}_\pm(\mathbf{k}) = \mathbf{e}_\theta \pm i\mathbf{e}_\phi$$

On peut maintenant se placer dans la basse $(\mathbf{h}_+, \mathbf{h}_-, \mathbf{e}_k)$ pour diagonaliser la relation de dispersion obtenue précédemment. Notons que $\mathbf{e}_k \times \mathbf{h}_\pm = \mp i\mathbf{h}_\pm$, de sorte qu'en définissant $\mathbf{b}_1 = b_{1,+}\mathbf{h}_+ + b_{1,-}\mathbf{h}_-$, on obtient

$$(\omega^2 - b_0^2 k_z^2)(b_{1,+}\mathbf{h}_+ + b_{1,-}\mathbf{h}_-) = db_0 k_z k\omega(b_{1,+}\mathbf{h}_+ - b_{1,-}\mathbf{h}_-)$$

Cette équation est équivalente au système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - b_0^2 k_z^2 - db_0 k_z k\omega & 0 \\ 0 & \omega^2 - b_0^2 k_z^2 + db_0 k_z k\omega \end{pmatrix} \mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$$

L'annulation du déterminant nous donne bien sûr les deux équations suivantes :

$$\omega^2 \mp db_0 k_z k\omega - b_0^2 k_z^2 = 0$$

dont les solutions sont

$$\boxed{\begin{cases} \omega_{-,\pm} = \pm \dfrac{db_0 k_z k}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 + \dfrac{4}{d^2k^2}}\right) \\ \omega_{+,\pm} = \pm \dfrac{db_0 k_z k}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \dfrac{4}{d^2k^2}}\right) \end{cases}}$$

Les solutions $\omega_{-,-}$ et $\omega_{+,+}$ ont une polarisation circulaire droite, tandis que les solutions $\omega_{-,+}$ et $\omega_{+,-}$ ont une polarisation circulaire gauche.

On peut s'intéresser à deux régimes asymptotiques pertinents :

— A grande échelle, $kd \to 0$. On obtient alors une onde d'Alfvén standard.

— A petite échelle, $kd \to +\infty$.

2.2 Régime compressible

Pour terminer, considérons le système MHD compressible, idéal et inviscide, avec effet Hall.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) = 0 \\ \rho_m \left(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\right) = -\nabla P + \dfrac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0} \\ \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \dfrac{\nabla \times ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})}{\mu_0 ne} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

Nous choisissons à nouveau une fermeture polytropique pour la pression :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\gamma \frac{P}{\rho_m} \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u})$$

On voit aisément que $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \frac{\nabla(B^2)}{2}$. D'autre part, $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u})$. Linéarisons le système autour des champs d'équilibre :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_{m,1}}{\partial t} + \rho_{m,0} \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \\ \rho_{m,0} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla P_1 - \frac{\nabla(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1)}{\mu_0} + \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{B}_1}{\mu_0} \\ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1 - \mathbf{B}_0(\nabla \cdot \mathbf{u}_1) - \frac{\nabla \times ((\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0)}{\mu_0 n e} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\gamma P_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1$$

Comme dans le cas incompressible, on peut utiliser des champs normalisés :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_{m,0}} \frac{\partial \rho_{m,1}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\frac{\nabla P_1}{\rho_{m,0}} - \nabla(\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_1) + (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla)\mathbf{b}_1 \\ \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial t} = (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1 - \mathbf{b}_0(\nabla \cdot \mathbf{u}_1) - d\nabla \times ((\nabla \times \mathbf{b}_1) \times \mathbf{b}_0) \\ \nabla \cdot \mathbf{b}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\rho_{m,0}} \frac{\partial P_1}{\partial t} = -\gamma \frac{P_0}{\rho_{m,0}} \nabla \cdot \mathbf{u}_1$$

Passons dans l'espace de Fourier :

$$\begin{cases} -i\omega \frac{\rho_{m,1}}{\rho_{m,0}} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \\ -i\omega \mathbf{u}_1 = -i\mathbf{k} \frac{P_1}{\rho_{m,0}} - i\mathbf{k}(\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_1) + (\mathbf{b}_0 \cdot i\mathbf{k})\mathbf{b}_1 \\ -i\omega \mathbf{b}_1 = (\mathbf{b}_0 \cdot i\mathbf{k})\mathbf{u}_1 - \mathbf{b}_0(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1) + d\mathbf{k} \times ((\mathbf{k} \times \mathbf{b}_1) \times \mathbf{b}_0) \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_1 = 0 \end{cases}$$

$$-i\omega \frac{P_1}{\rho_{m,0}} = -\gamma \frac{P_0}{\rho_{m,0}} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1$$

D'une part, l'équation d'état sur la pression se réécrit

$$\omega P_1 = \rho_{m,0} c_s^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1$$

où $c_s = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_{m,0}}}$ est la vitesse du son. D'autre part, l'équation sur le champ magnétique se réécrit

$$\omega \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1) - (\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{k})\mathbf{u}_1 + id(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_0)(\mathbf{k} \times \mathbf{b}_1)$$

Enfin, l'équation sur l'impulsion se réécrit

$$\omega \mathbf{u}_1 = \mathbf{k}\left(\frac{P_1}{\rho_{m,0}} + \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_1\right) - (\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{k})\mathbf{b}_1$$

Posons $\mathbf{b}_0 = b_0\mathbf{e}_z$. On peut décomposer $\mathbf{k} = k_y\mathbf{e}_y + k_z\mathbf{e}_z$. Notre système se réécrit (en remplaçant la pression) :

$$\left\{\begin{array}{l} \omega^2\mathbf{u}_1 = \mathbf{k}(c_s^2\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_1 + \omega\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{b}_1) - \omega b_0 k_z\mathbf{b}_1 \\ \omega\mathbf{b}_1 = -b_0 k_z\mathbf{u}_1 + \mathbf{b}_0(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_1) + idb_0k_z\mathbf{k}\times\mathbf{b}_1 \end{array}\right.$$

La divergence appliquée à la première équation donne

$$(\omega^2 - k^2c_s^2)\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_1 = \omega^2\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_0$$

Commençons par exprimer le champ de vitesses perturbé en fonction des autres grandeurs du problème. De l'équation portant sur le champ magnétique, nous obtenons

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{\omega}{b_0k_z}\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_1}{b_0k_z}\mathbf{b}_0 + id\mathbf{k}\times\mathbf{b}_1$$

Nous pouvons ensuite isoler $\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_1 = \dfrac{\omega^2}{\omega^2 - k^2c_s^2}\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_0$ de telle sorte que l'équation précédente devient

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{\omega}{b_0k_z}\mathbf{b}_1 + \frac{\omega^2}{\omega^2 - k^2c_s^2}\frac{\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_0}{b_0k_z}\mathbf{b}_0 + id\mathbf{k}\times\mathbf{b}_1$$

Puis nous pouvons injecter $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_1$ dans l'équation portant sur le champ de vitesse :

$$-\frac{\omega^3}{b_0k_z}\mathbf{b}_1 + \frac{\omega^4}{\omega^2 - k^2c_s^2}\frac{\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_0}{b_0k_z}\mathbf{b}_0 + id\omega^2\mathbf{k}\times\mathbf{b}_1 = \left(\frac{\omega^2c_s^2}{\omega^2 - k^2c_s^2}\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_0 + \omega\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{b}_1\right)\mathbf{k} - \omega b_0k_z\mathbf{b}_1$$

Regroupons les termes de cette équation vectorielle :

$$\left(\omega b_0k_z - \frac{\omega^3}{b_0k_z}\right)\mathbf{b}_1 = \left(\frac{\omega^2c_s^2}{\omega^2 - k^2c_s^2} + \omega\right)(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{b}_1)\mathbf{k} - id\omega^2\mathbf{k}\times\mathbf{b}_1$$

On peut écrire $\mathbf{b}_1 = b_{1,x}\mathbf{e}_x + b_{1,z}\mathbf{e}_z$ (car $\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}_1 = 0$). En multipliant toute l'équation par $-\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\omega^2 - k^2c_s^2}{b_0^3k_z^3}$, on obtient la relation de dispersion suivante :

$$(\Omega^2 - 1)\left(\Omega^2 - \frac{\beta}{\alpha^2}\right)\mathbf{b}_1 = -\Omega^2\frac{b_{1,z}}{\alpha}\mathbf{e}_k + \frac{\Omega^2}{\alpha^2}b_{1,z}\mathbf{e}_z + id\Omega\left(\Omega^2 - \frac{\beta}{\alpha^2}\right)\mathbf{k}\times\mathbf{b}_1$$

avec $\Omega = \dfrac{\omega}{b_0k_z}$, $\beta = \dfrac{c_s^2}{b_0^2}$ et $\alpha = \dfrac{k_z}{k}$.

L'écriture matricielle de cette équation et la condition d'annulation du déterminant fournissent la relation de dispersion suivante :

$$\boxed{\Omega^6 - \left(1 + \frac{\beta + 1}{\alpha^2} + k^2d^2\right)\Omega^4 + \left(\frac{1 + 2\beta + \beta k^2d^2}{\alpha^2}\right)\Omega^2 - \frac{\beta}{\alpha^2} = 0}$$