

Équations de la magnétohydrodynamique

Clément Mazzocchi

Juillet 2025

Table des matières

1	Équations cinétiques	1
2	Équations fluides	2
2.1	Définition des grandeurs fluides	2
2.2	Conservation de la densité et de l'impulsion	3
2.3	Conservation de l'énergie	4
3	La MHD	4
3.1	Système MHD	5
3.2	MHD incompressible	6

Le plasma est un état de la matière dans lequel les atomes sont ionisés. Les électrons libres qui y évoluent font du plasma un milieu chargé localement. Deux approches sont possibles pour décrire le plasma : la théorie cinétique qui modélise l'évolution du plasma de manière statistique à partir d'une fonction de distribution des vitesses, et l'approche fluide qui consiste à considérer le plasma comme un fluide chargé. La magnétohydrodynamique (MHD) est la théorie fluide permettant de décrire l'état plasma.

La MHD trouve des applications dans de nombreux domaines : confinement des plasmas pour la fusion thermonucléaire (tokamaks), étude des vents solaires et des magnétosphères planétaires, dynamique du noyau terrestre, propulsion MHD, etc. C'est donc un outil à la fois fondamental et appliqué. À l'intersection de l'hydrodynamique et de l'électromagnétisme, elle se déduit de l'approche cinétique.

Dans ce document, on se propose de dériver les équations cinétiques puis d'en déduire les équations de la MHD. Nous noterons U un champ scalaire, \mathbf{U} un champ vectoriel et \mathbb{U} un champ de tenseurs d'ordre au moins égal à 2.

1 Équations cinétiques

La théorie cinétique est une approche mésoscopique : elle ne décrit pas le mouvement de chaque particule individuellement (mécanique quantique) mais se place à l'échelle d'un volume infinitésimal, contenant un grand nombre de particules. On s'appuie, pour décrire une espèce s plasma, sur une fonction de distribution des vitesses f_s dépendant de la position \mathbf{r} et de la vitesse \mathbf{v} du volume infinitésimal considéré, et du temps t . Ainsi, $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ est le nombre de particules évoluant au point \mathbf{r} à la vitesse \mathbf{v} au temps t .

Nous allons commencer par établir l'équation cinétique pour un plasma sans collision : il s'agit de l'équation de Vlasov. Les équations cinétiques pour les plasmas collisionnels sont similaires à l'équation de Vlasov mais elles contiennent un terme de forçage supplémentaire.

Considérons un volume $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^6$ dans l'espace des phases (\mathbf{r}, \mathbf{v}) . On pose $\mathcal{V} = \mathcal{V}_r \times \mathcal{V}_v$ où $\mathcal{V}_r, \mathcal{V}_v \subset \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{S}_r \subset \mathbb{R}^2$ la surface de \mathcal{V}_r et $\mathcal{S}_v \subset \mathbb{R}^2$ la surface de \mathcal{V}_v . Nous allons établir l'expression du flux de

particules sortant de ce volume. Dans l'espace des positions, ce flux est

$$\int_{\mathcal{S}_r \times \mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}_r d\mathbf{v}$$

où $d\mathbf{S}_r$ est le vecteur unitaire normal à \mathcal{S}_r . De manière similaire, le flux dans l'espace des vitesses s'écrit :

$$\int_{\mathcal{S}_v \times \mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_v d\mathbf{r}$$

où \mathbf{a} est l'accélération et $d\mathbf{S}_v$ le vecteur unitaire normal à \mathcal{S}_v . L'équation de conservation du nombre de particules s'écrit donc

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = - \int_{\mathcal{S}_r \times \mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}_r d\mathbf{v} - \int_{\mathcal{S}_v \times \mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_v d\mathbf{r}$$

soit, en utilisant le théorème de la divergence,

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v}f) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{a}f) \right) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = 0$$

Le volume \mathcal{V} considéré étant arbitraire, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v}f) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{a}f) = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + f \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f + f \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a} = 0$$

Or, les variables \mathbf{r} et \mathbf{v} sont indépendantes donc $\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = 0$. De plus, en notant $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$, on voit qu'en considérant une force \mathbf{F} de la forme de la force de Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, le dernier terme est nul également. On obtient donc l'équation de Vlasov, régissant l'évolution d'un plasma sans collision :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0}$$

Dans le cas d'un plasma avec collisions, l'équation de Vlasov ci-dessus doit être ajustée d'un terme source exclusivement dû aux collisions. L'équation cinétique est alors de la forme suivante :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c}$$

2 Équations fluides

Nous exposons maintenant le passage de la description cinétique et la description fluide.

2.1 Définition des grandeurs fluides

On obtient les équations fluides régissant l'évolution macroscopique d'une espèce s du plasma en intégrant l'équation cinétique. Commençons par définir les différents moments de la fonction de distribution des vitesses, qui sont les grandeurs observables à l'échelle macroscopique :

$$\text{Densité } n_s(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

$$\text{Vitesse } \mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_s(\mathbf{r}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

Pression $\mathbb{P}_s(\mathbf{r}, t) = m_s \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t)) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t)) f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$

Flux de chaleur $\mathbb{Q}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} m_s \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t)) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t)) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t)) f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$

Chacune de ces grandeurs est un tenseur, d'ordre 0 (scalaire), 1 (vecteur), 2 et 3 respectivement pour la densité, la vitesse, la pression et le flux de chaleur.

La magnétohydrodynamique est une théorie monofluide, ce qui signifie que le plasma dans son ensemble sera décrit avec un unique champ de densité et un unique champ de vitesse. Cette hypothèse repose sur la condition de quasi-neutralité : en notant n_s la densité de l'espèce s et q_s sa charge, on a

$$\sum_s n_s q_s = 0.$$

Sous cette hypothèse, on peut s'autoriser à définir la densité volumique de masse du plasma, sa vitesse et sa pression : en notant m_s la masse d'une particule de l'espèce s , \mathbf{u}_s sa vitesse et \mathbb{P}_s la pression associée, on pose

$$\rho_m = \sum_s n_s m_s, \quad \mathbf{u} = \frac{\sum_s n_s m_s \mathbf{u}_s}{\rho_m}, \quad \mathbb{P} = \sum_s \mathbb{P}_s$$

2.2 Conservation de la densité et de l'impulsion

Une première intégration de l'équation cinétique multipliée par m donne l'équation de conservation de la densité. Notons que le terme collisionnel n'intervient pas ici.

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) = 0$$

Intégrer l'équation cinétique multipliée par $m\mathbf{v}$ donne l'équation de conservation de l'impulsion :

$$\rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla \cdot \mathbb{P} + n\mathbf{F} + \mathbf{R}$$

\mathbf{R} provient du terme de collisions.

Remarquons que l'équation de conservation du moment d'ordre 0 (n) fait intervenir le moment d'ordre 1 (\mathbf{u}), et que l'équation de conservation du moment d'ordre 1 fait intervenir le moment d'ordre 2 (\mathbb{P}). Nous pourrions continuer ainsi, en intégrant l'équation cinétique à des ordres toujours plus élevés : le système d'équations fluides qui découle de ces intégrations est infini. Par exemple, l'équation de conservation du tenseur de pression ferait intervenir le flux de chaleur. Pour clore le système, nous avons donc besoin d'une équation de fermeture donnée par la physique. Clore le système conduit forcément à une approximation, mais plus on intègre à des ordres élevés, meilleure est l'approximation. Nous nous limiterons ici à seulement deux équations de conservation (celles de la densité et de la quantité de mouvement) et choisirons une équation de fermeture pour le tenseur de pression.

Dans la suite, nous ferons l'hypothèse que le tenseur de pression est isotrope, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r}, t)\mathbb{I}$, où \mathbb{I} est le tenseur identité d'ordre 2. Cette hypothèse d'isotropie suppose un équilibre local rapide des directions de vitesse, ce qui n'est pas toujours valable (par exemple dans des plasmas collisionnels faibles ou fortement magnétisés). Elle constitue une approximation mais reste raisonnable dans beaucoup de régimes de MHD classique.

Il existe de nombreuses équations de fermeture possibles selon la physique sous-jacente au système considéré. Si l'on souhaite une relation de fermeture pour la pression, on utilise le plus souvent une équation polytropicque de la forme générale :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho_m^\gamma} \right) = 0$$

L'indice polytropique γ peut être choisi selon la situation physique considérée. $\gamma = 1$ correspond à un système isotherme : on a alors $P = c_s^2 \rho_m$ avec c_s la vitesse du son. $\gamma = \frac{5}{3}$ correspond à un système adiabatique. Enfin, $\gamma = +\infty$ décrit un système incompressible. Des lois de fermeture à des ordres supérieurs existent, comme la loi de Fourier ($\mathbf{Q} = -\kappa \nabla T$) qui exprime le flux de chaleur en fonction de la température.

Le terme de force sera donné par la force de Lorentz : $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$. Enfin, le terme de résistivité s'écrit $\mathbf{R} = \tilde{\nu} \Delta \mathbf{u} + \frac{\tilde{\nu}}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ avec $\tilde{\nu}$ le coefficient de viscosité dynamique. En notant $\rho_q = nq$ et $\mathbf{j} = \rho_q \mathbf{u}$, les équations de conservation s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) & = 0 \\ \rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) & = -\nabla P + \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \tilde{\nu} \Delta \mathbf{u} + \frac{\tilde{\nu}}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \end{cases}$$

2.3 Conservation de l'énergie

On donne pour mémoire les équations de conservation de l'énergie (ou de la pression) même si on ne les utilisera pas dans la suite, c'est-à-dire que l'on utilisera une équation de fermeture du second ordre en faisant une approximation sur la pression.

Énergie thermique D'une part, en intégrant l'équation cinétique multipliée par $m(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u})$, on obtient l'équation de conservation de l'énergie thermique (que l'on donne ici pour une pression scalaire) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} P \right) + \nabla \cdot \left(\frac{5}{2} P \mathbf{u} + \mathbf{Q} \right) = \mathbf{u} \cdot \nabla P$$

On a ici défini le vecteur flux de chaleur \mathbf{Q} qui est la contraction de \mathbb{Q} sur les deux derniers indices.

Énergie dirigée D'autre part, en intégrant l'équation de conservation de l'impulsion multipliée par \mathbf{v} , on obtient l'équation de conservation de l'énergie dirigée :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_m \frac{u^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\rho_m \frac{u^2}{2} \mathbf{u} \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla P + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

La combinaison de ces deux relations donne l'équation de conservation de l'énergie cinétique totale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_m \frac{u^2}{2} + \frac{3}{2} P \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{u} \left(\rho_m \frac{u^2}{2} + \frac{5}{2} P \right) + \mathbf{Q} \right) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

Comme on s'y attendait, cette équation fait intervenir le tenseur flux de chaleur.

Remarquons qu'à ce stade, nous n'avons pas utilisé les équations de Maxwell : les équations de conservation obtenues ci-dessus proviennent uniquement des intégrations successives de l'équation cinétique. Il s'agit en fait des équations de Navier-Stokes, qui régissent le comportement de n'importe quel fluide, avec un terme de force bien particulier qui est la force de Lorentz. Nous n'obtiendrons les équations de la MHD qu'après avoir utilisé les équations de Maxwell et la loi d'Ohm, qui lie le courant électrique avec le champ électromagnétique.

3 La MHD

Équations de Maxwell Commençons par rappeler les équations de Maxwell, qui régissent l'évolution spatio-temporelle du champ électromagnétique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0} & \text{Maxwell-Gauss} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{Maxwell-Thomson} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{Maxwell-Faraday} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \text{Maxwell-Ampère} \end{array} \right.$$

Dans la limite non relativiste, le second terme du membre de droite de l'équation de Maxwell-Ampère est négligeable. Nous utiliserons donc la relation suivante entre le courant électrique et le champ magnétique :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

Loi d'Ohm Introduisons aussi la loi d'Ohm, qui modélise la relation entre le courant électrique et le champ électromagnétique. La loi d'Ohm classique modélise le fait que lorsqu'un conducteur solide est soumis à un champ électrique, le courant électrique qui le traverse est proportionnel au champ imposé :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

où σ est la conductivité électrique du milieu considéré. En MHD, les courants responsables des champs électriques sont transportés par la matière. Il faut donc ajouter à la loi d'Ohm un terme qui correspond en fait à un changement de référentiel :

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

On désigne cette relation par la loi d'Ohm généralisée. Enfin, on peut raffiner cette expression par différents termes correctifs, le plus important étant le terme Hall :

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{ne} \right)$$

C'est cette version de la loi d'Ohm que l'on utilisera dans la suite.

3.1 Système MHD

Avant de donner les équations de la MHD, revenons un instant sur l'équation de conservation de l'impulsion :

$$\rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \tilde{\nu} \Delta \mathbf{u} + \frac{\tilde{\nu}}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

Dans cette équation, le terme $\rho_q \mathbf{E}$ dû à la force de Coulomb est négligeable par-rapport au terme $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$. En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère dans la limite non relativiste, nous obtenons donc

$$\rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0} + \tilde{\nu} \Delta \mathbf{u} + \frac{\tilde{\nu}}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

D'autre part, nous allons déterminer l'équation d'évolution du champ magnétique. L'équation de Maxwell-

Faraday et la loi d'Ohm donnent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E} \\
&= -\nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{ne} \right) \\
&= -\frac{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})}{\mu_0 \sigma} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla \times ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})}{\mu_0 ne} \\
&= \frac{\Delta \mathbf{B}}{\mu_0 \sigma} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla \times ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})}{\mu_0 ne}
\end{aligned}$$

Nous avons maintenant en notre possession tous les éléments pour écrire les équations de la MHD : conservation de la densité, conservation de l'impulsion, évolution du champ magnétique. Posons $\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$ la résistivité magnétique : elle mesure la dissipation du champ magnétique par effet Joule. Le système MHD complet (auquel il faut bien sûr ajouter une équation de fermeture) est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) = 0 \\
\rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0} + \tilde{\nu} \Delta \mathbf{u} + \frac{\tilde{\nu}}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla \times ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})}{\mu_0 ne} + \eta \Delta \mathbf{B} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} = 0
\end{array} \right.$$

Il s'agit de la forme la plus générale de la MHD non relativiste : nous avons considéré un milieu compressible, nous avons inclus le terme Hall dans la loi d'Ohm et nous avons pris en compte les aspects collisionnels du plasma qui apparaissent dans les termes visqueux de l'équation de conservation de l'impulsion. En fonction des problèmes considérés, nous n'aurons pas besoin d'autant de précision. Nous pourrions être amenés à négliger le terme Hall. De plus, nous parlerons de MHD incompressible lorsque $\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0$, de MHD idéale lorsque $\eta = 0$ ou de MHD inviscide lorsque $\tilde{\nu} = 0$.

3.2 MHD incompressible

Établissons les équations de la MHD incompressible. L'hypothèse est que la densité du milieu est constante : $n = n_0 \implies \rho_m = \rho_{m,0} \implies \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0$. L'équation de conservation de la densité devient alors

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

L'équation de conservation de l'impulsion devient

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho_{m,0}} + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0 \rho_{m,0}} + \frac{\tilde{\nu}}{\rho_{m,0}} \Delta \mathbf{u}$$

Pour simplifier cette expression, on peut normaliser le champ magnétique et le rendre homogène à une vitesse. Posons donc $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho_{m,0}}}$ et $\nu = \frac{\tilde{\nu}}{\rho_{m,0}}$ la viscosité cinématique. L'équation sur l'impulsion se réécrit alors

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho_{m,0}} + (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} + \nu \Delta \mathbf{u}$$

Avec les mêmes notations, l'équation d'évolution du champ magnétique se réécrit

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) - \sqrt{\frac{\rho_{m,0}}{\mu_0 n_0^2 e^2}} \nabla \times ((\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}) + \eta \Delta \mathbf{b}$$

Notons que $\sqrt{\frac{\rho_{m,0}}{\mu_0 n_0^2 e^2}} = \sqrt{\frac{c^2 \epsilon_0 m}{n_0 e^2}} = \frac{c}{\omega_p}$ où $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}}$ est la pulsation plasma. Ce coefficient est donc une longueur caractéristique que l'on notera d . Cette échelle de longueur compare les effets inertiels des électrons au magnétisme, et devient significatif dans des plasmas peu denses ou à petite échelle. Ainsi, on a

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) - d \nabla \times ((\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}) + \eta \Delta \mathbf{b}$$

Finalement, le système MHD incompressible s'écrit

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho_{m,0}} + (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} + \nu \Delta \mathbf{u} \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) - d \nabla \times ((\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}) + \eta \Delta \mathbf{b} \\ \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \end{cases}$$

L'utilisation d'identités vectorielles permet de réécrire ce système sous une forme plus symétrique. Définissons la pression totale $P_* = \frac{P}{\rho_{m,0}} + \frac{b^2}{2}$. Elle est la somme d'un terme de pression cinétique ($\propto P$) et d'un terme de pression magnétique ($\propto b^2$). On a alors

$$\boxed{\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P_* + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \nu \Delta \mathbf{u} \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} - d \nabla \times ((\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}) + \eta \Delta \mathbf{b} \\ \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \end{cases}}$$