Réseaux de neurones physiquement informés

Alexandre Gachenot, Kyriann Loué, Alexis Lucas, Clément Mazzochi, Mathis Metz, Paul Saurin

Institut Polytechnique de Paris

mai 2025

Méthodes de Résolution d'EDP

- Les **méthodes classiques** (éléments finis, différences finies) nécessitent un maillage explicite du domaine et une résolution numérique directe.
- Les **méthodes d'apprentissage** approchent la solution à l'aide de réseaux de neurones entraînés sur des données ou des lois physiques.
- Les **Physics-Informed Neural Networks (PINNs)** intègrent directement la physique sous-jacente dans la fonction de perte, visant à minimiser l'écart entre la solution approximée et la loi physique.

Fonction de loss :

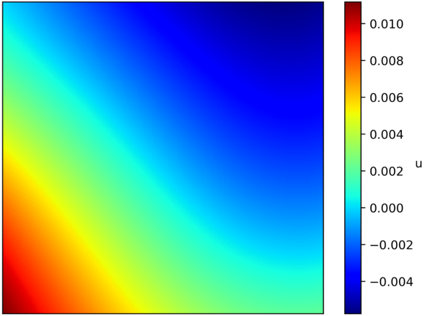
$$\mathcal{C}(\hat{u}_k) = \left\| \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial t} + \mathcal{L}\hat{u}_k - f \right\| + \left\| \mathcal{B}\hat{u}_k - g \right\| + \left\| \hat{u}_k(\cdot, 0) - u_0 \right\| .$$

Équation de Helmholtz

- L'équation de Helmholtz modélise les phénomènes ondulatoires stationnaires :

$$\Delta u + k^2 u = f(x, y)$$

- Le PINN est entraîné à respecter cette équation dans un domaine 2D avec conditions de Dirichlet.
- Une source f non nulle est imposée pour éviter la solution triviale.



Tourbillon Isentropique : Modèle Physique

- On s'intéresse à un **tourbillon isentropique** se déplaçant rectilignement dans un fluide.
- Les grandeurs physiques étudiées sont :

$$u(x, y, t), \quad p(x, y, t), \quad \rho(x, y, t)$$

- Équations d'Euler :

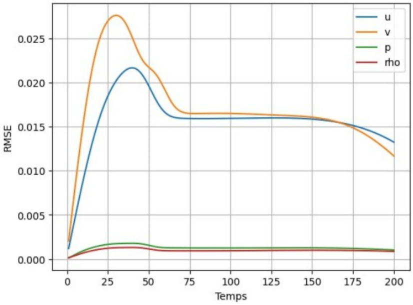
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \dfrac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\operatorname{grad}(p) \end{cases}$$

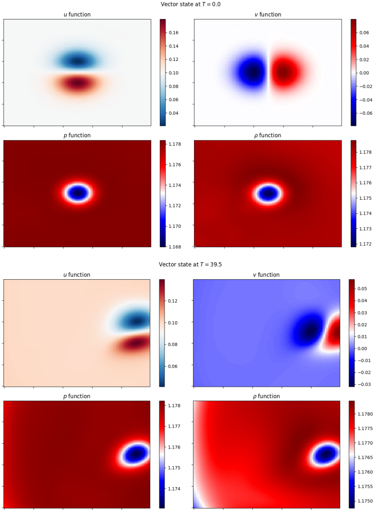
- Forme générale de la loss pour l'entrainement :

$$\mathcal{L} = \sum_i w_i(t)\,\mathcal{L}_i(t), \quad \text{où les poids } w_i(t) \text{ sont ajustés à chaque étape}$$

Tourbillon Isentropique : Résultats

- Évolution de la RMSE pour chaque variable (loss customisée), évolution en temps de la solution





Autres avantages et limites des PINNs

- Traitement des géométries complexes : les méthodes classiques perdent en efficacité quand la géométrie du domaine est plus complexe. Quand on utilise des PINNs, on peut pour résoudre ce problème :
  - Intégrer les conditions de bord dans la fonction de coût.
  - Intégrer les conditions de bord dans l'ansatz.
  - Imposer directement les conditions de bord de manière analytique
- Limites des PINNs : absence de garanties de convergence et de bornes d'erreur théoriques pour les PINNs, contrairement aux méthodes classiques pour lesquelles on contrôle à la fois la vitesse de convergence et la validité de la solution