Résumé du cours d'analyse fonctionnelle : séance 5

Clément Mazzocchi
d'après le cours donné par Éric Cances
École nationale des ponts et chaussées | Institut Polytechnique de Paris

2024-2025

1 Problème de Neumann

Soient Ω un ouvert borné lipschitzien connexe de $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$. On s'intéresse au problème aux limites suivant :

$$\text{Chercher } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1}$$

La formulation variationnelle de (1) s'écrit, avec $V = H^1(\Omega)$:

$$\text{Chercher } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V, a(u,v) = b(v) \tag{2}$$

avec $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v$ et $b(v) = \displaystyle\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} gv$.

Théorème. — *Si* $\displaystyle\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g \neq 0$, *(1) n'a pas de solution.*

— *Si* $\displaystyle\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g = 0$, *les solutions de (1) sont de la forme* $u(x) = u_0(x) + c, c \in \mathbb{R}$, *où* u_0 *est l'unique solution de*

$$\textit{Chercher } u \in H^1(\Omega) \textit{ tel que } \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \textit{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \textit{sur } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_\Omega u = 0 & \end{array} \right. \tag{3}$$

En posant $V_0 = \left\{ v \in H^1(\Omega), \displaystyle\int_\Omega v = 0 \right\}$, *(3) est équivalent à*

$$\textit{Chercher } u \in V_0 \textit{ tel que } \forall v \in V_0, a(u,v) = b(v). \tag{4}$$

Théorème (Lax-Milgram)**.** *Soient* W *un espace de Hilbert,* $a : W \times W \to \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire, continue et coercive et* $b : W \to \mathbb{R}$ *une forme linéaire continue. Alors le problème*

$$\textit{Chercher } u \in W \textit{ tel que } \forall v \in W, a(u,v) = b(v)$$

est bien posé.

Théorème (Inégalité de Poincaré-Wirtinger)**.** *Soit Ω un ouvert borné lipschitzien connexe de* $\mathbb{R}^d$. $\exists c_W \in \mathbb{R}_+, \forall v \in H^1(\Omega), \left\| v - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c_W \|\boldsymbol{\nabla} v\|_{L^2(\Omega)}$.

Appliquons les résultats précédents à (4) :

— $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. En tant que sous-espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$, V_0 équipé de la norme de $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

— $\forall u, v \in H^1(\Omega), |a(u,v)| = \left| \int_\Omega \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \right| \leq \|\boldsymbol{\nabla} u\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{\nabla} v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$ donc a est continue sur $H^1(\Omega)$, et par conséquent sur V_0.

— $\forall v \in H^1(\Omega), |b(v)| = \left| \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv \right| \leq \left| \int_\Omega fv \right| + \left| \int_{\partial\Omega} gv \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + c_T \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)}$ par le théorème de trace, donc b est continue sur $H^1(\Omega)$, et par conséquent sur V_0.

— $\forall v \in V_0, \|v\|_{H^1(\Omega)} = \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\nabla} v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left(1 + c_W^2\right) \|\boldsymbol{\nabla} v\|^2_{L^2(\Omega)} = \left(1 + c_W^2\right) a(v,v)$, donc $forall v \in V_0, a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$ avec $\alpha = \frac{1}{1 + c_W^2} > 0$, donc a est coercive sur V_0.

Ainsi, le problème (4) est bien posé.

2 Injections compactes

Définition. *Soient V et W des espaces de Banach. Soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$. On dit que T est un opérateur compact si $\forall B \subset V$ borné, $\overline{T(B)}$ est un compact de W, ou de façon équivalente si pour toute suite bornée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de V, on peut extraire de $(T(v_n))_{n\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge dans W.*

Théorème. *Soient V et W des espaces de Banach. L'ensemble $\mathcal{K}(V, W)$ des opérateurs compacts de V dans W est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(V, W)$.*

Théorème (de Rellich)**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$.*

— *L'injection canonique $i : H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est compacte.*

— *Si Ω est lipschitzien, l'injection canonique $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est compacte.*