Résumé du cours d'analyse fonctionnelle : séance 4

Clément Mazzocchi
d'après le cours donné par Éric Cances
École nationale des ponts et chaussées | Institut Polytechnique de Paris

2024-2025

1 Problèmes aux limites

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ uniformément lipschitzien. On s'intéresse au problème aux limites suivant :

$$\text{Chercher } u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} -\boldsymbol{\nabla} \cdot (A \boldsymbol{\nabla} u) = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ (A \boldsymbol{\nabla} u) \cdot n + \beta u = g & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

avec les hypothèses :

- $A \in L^\infty \left(\Omega, \mathbb{R}^{d \times d}_{\text{sym}}\right)$;
- $\exists c > 0, \forall y \in \mathbb{R}^d, y^T A\,(x)\, y \geq c|y|^2$ pour presque tout $x \in \Omega$;
- $\beta > 0$.

On a alors

$$\int_\Omega -\boldsymbol{\nabla} \cdot (A \boldsymbol{\nabla} u)\, v = \int_\Omega f v.$$

Or,

$$\int_\Omega -\boldsymbol{\nabla} \cdot (A \boldsymbol{\nabla} u)\, v = \int_\Omega (A \boldsymbol{\nabla} u) \cdot \boldsymbol{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} ((A \boldsymbol{\nabla} u) \cdot n)\, v = \int_\Omega (A \boldsymbol{\nabla} u) \cdot \boldsymbol{\nabla} v - \int_{\Gamma_1} ((A \boldsymbol{\nabla} u) \cdot n)\, v - \int_{\Gamma_2} \underbrace{((A \boldsymbol{\nabla} u) \cdot n)}_{g - \beta u} v.$$

On impose $u = v = 0$ sur Γ_1 et $\forall u, v \in V = \left\{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_1} = 0\right\}$, on pose

$$a(u, v) = \int_\Omega (A \boldsymbol{\nabla} u) \cdot \boldsymbol{\nabla} v + \beta \int_{\Gamma_2} uv, \quad b(v) = \int_\Omega f v + \int_{\Gamma_2} g v.$$

La définition de V assure que a est bien définie puisqu'on a alors

- $(A \boldsymbol{\nabla} u) \cdot \boldsymbol{\nabla} v \in L^1(\Omega)$ car
  - $A \boldsymbol{\nabla} u \in L^2(\Omega)$ car
    - $A \in L^\infty(\Omega)$.
    - $u \in H^1(\Omega) \implies \boldsymbol{\nabla} u \in L^2(\Omega)$.
  - $v \in H^1(\Omega) \implies \boldsymbol{\nabla} v \in L^2(\Omega)$.
- $uv \in L^1(\Gamma_2)$ car
  - $u \in H^1(\Omega) \implies u \in L^2(\Gamma_2)$ par le théorème de trace.

— $v \in H^1(\Omega) \implies v \in L^2(\Gamma_2)$ par le théorème de trace.
On sait également que b est bien définie puisque l'on peut écrire

$$b(v) = \langle f, v \rangle_{V',V} + \langle g, v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}.$$

On a donc trouvé une formulation variationnelle du problème initial :

$$\text{Chercher } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V, a(u,v) = b(v).$$

De manière générale, les formulations variationnelles de la forme

$$\text{Chercher } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V, a(u,v) = b(v)$$

où a est une forme bilinéaire sur $V \times V$ et b une forme linéaire sur V, permettent de mettre en place une méthode de type éléments finis. En effet, en posant $V_h \subset V$ de dimension finie N, on peut discrétiser le problème sous la forme

$$\text{Chercher } u_h \in V_h \text{ tel que } \forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = b(v_h).$$

Soit $(\phi_1, \dots, \phi_N)$ une base de V_h. Tout vecteur de V_h s'écrit $v_h(x) = \sum_{i=1}^{N} v_j \phi_j(x)$. On peut donc réécrire le problème sous la forme

$$\text{Chercher } U \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } AU = B$$

où $A = (A_{i,j})_{i,j \in [\![1,N]\!]} = (a(\phi_j, \phi_i))_{i,j \in [\![1,N]\!]}$ et $B = (B_j)_{j \in [\![1,N]\!]} = (b(\phi_j))_{j \in [\![1,N]\!]}$.

2 Injections compactes

Définition. *Soient V et W des espaces de Banach. Soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$. On dit que T est un opérateur compact si $\forall B \subset V$ borné, $\overline{T(B)}$ est un compact de W, ou de façon équivalente si pour toute suite bornée $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de V, on peut extraire de $(Tv_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge dans W.*

Théorème (de Rellich)**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$.*
- *L'injection canonique $i : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est compacte.*
- *Si Ω est lipschitzien, l'injection canonique $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est compacte.*

Un exemple d'application du théorème de Rellich est l'inégalité de Poincaré.

Théorème (Inégalité de Poincaré)**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Il existe une constante $C_\Omega \in \mathbb{R}_+$ telle que*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\boldsymbol{\nabla} u\|_{L^2(\Omega)}.$$