Résumé du cours d'analyse fonctionnelle : séance 3

Clément Mazzocchi
d'après le cours donné par Éric Cances
École nationale des ponts et chaussées | Institut Polytechnique de Paris

2024-2025

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

1 Espaces de Sobolev

Définition. *Soient $p \in [1, +\infty]$ et $k \in \mathbb{N}$.*

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq k, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\}$$

$$\forall u \in W^{k,p}(\Omega), \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Théorème.
- *$\forall p \in [1, +\infty]$, $\forall k \in \mathbb{N}^d$, $W^{k,p}$ est un espace de Banach.*
- *$\forall k \in \mathbb{N}^d$, $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Remarque. On a en particulier $H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \nabla u \in \left(L^2(\Omega)\right)^d \right\}$. Dans ce cas, on utilise le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

si les fonctions u et v sont à valeurs réelles, ou le produit hermitien

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \bar{u}v + \int_\Omega \nabla \bar{u} \cdot \nabla v$$

si elles sont à valeurs complexes.

Proposition. *Soit $u \in H^1(\Omega)$.*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \qquad \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Définition.

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

2 Théorème de trace

Théorème (de trace)**.** *Soit Ω un ouvert uniformément lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. Alors l'application linéaire*

$$\begin{array}{rcl} H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}_c^0(\bar{\Omega}) & \to & L^2(\partial\Omega) \\ u & \mapsto & u|_{\partial\Omega} \end{array}$$

admet un unique prolongement par continuité

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega).$$

L'application trace γ_0 est continue et on a

$$\mathrm{Ker}(\gamma_0) = H_0^1(\Omega) \qquad \mathrm{Im}(\gamma_0) := H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

Enfin, on a la formule d'intégration par parties :

$$\forall u, v \in H^1(\Omega), \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v = \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v)(n \cdot e_j)\,\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

Définition.

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ T \in \mathcal{D}'(\Omega), \exists c \in \mathbb{R}_+, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), |\langle T, \phi\rangle| \leq c\|\phi\|_{H^1(\Omega)} \right\}$$

Théorème. $H^{-1}(\Omega)$ *est le dual topologique de* $H_0^1(\Omega)$.

Théorème. *Soit $T \in H^{-1}(\Omega)$. Alors T vérifie le système*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_T + u_T = T \\ u_T \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

Proposition.

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ T = u_0 + \sum_{j=1}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_j}, (u_0, ..., u_d) \in \left(L^2(\Omega)\right)^d \right\}$$

De plus, $u_0 = u_T$ du système précédent et $\forall 1 \leq j \leq d, u_j = -\dfrac{\partial u_T}{\partial x_j}$.

3 Injections continues entre espaces de Sobolev

Théorème. *Soit $p \in [1, +\infty[$. On pose $p^* = \dfrac{dp}{d-p}$. Alors $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow L^{p^*}\left(\mathbb{R}^d\right)$.*

Théorème (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg)**.**

$$\exists c \in \mathbb{R}_+, \|u\| L^{p^*}\left(\mathbb{R}^d\right) \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Voici les principaux résultats à retenir de cette section :

- $\forall p \in [1, +\infty[, H^1(]a, b[) \hookrightarrow \mathcal{C}^0([a, b])$.
- Si Ω est un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^2$, alors $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.
- Si Ω est un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^3$, alors $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$.

4 Inégalité d'interpolation dans les L^p

Théorème. *Soient $p \in [1, +\infty[$ et $q \in]p, +\infty]$. Soit $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Alors $\forall r \in [p, q], u \in L^r(\Omega)$ et $\|u\|^{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}$ où $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{1-\alpha}{q}$.*