Résumé du cours d'analyse fonctionnelle : séance 2

Clément Mazzocchi
d'après le cours donné par Éric Cances
École nationale des ponts et chaussées | Institut Polytechnique de Paris

2024-2025

1 Rappels sur la transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^d$

Définition (Transformée de Fourier)**.** *Soit* $u \in L^1\left(\mathbb{R}_x^d\right)$*.*

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}_x^d} u(x)\, e^{-i\xi\cdot x} \mathrm{d}x$$

Proposition.

$$\forall u \in L^1\left(\mathbb{R}_x^d\right) \cap L^2\left(\mathbb{R}_x^d\right), ||\hat{u}||_{L^2\left(\mathbb{R}_\xi^d\right)} = ||u||_{L^2\left(\mathbb{R}_x^d\right)}$$

Ce résultat permet de prolonger $\mathcal{F}$ *en une unitaire de* $L^2\left(\mathbb{R}_x^d\right)$ *dans* $L^2\left(\mathbb{R}_\xi^d\right)$*.*

Proposition.

$$\forall u \in L^1\left(\mathbb{R}_x^d\right), \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_j}(\xi) = i\xi_j \hat{u}(\xi)$$

Proposition (Transformée de Fourier inverse)**.** *Soit* $v \in L^1\left(\mathbb{R}_\xi^d\right)$*.*

$$\left(\mathcal{F}^{-1}v\right)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}_\xi^d} v(\xi)\, e^{i\xi\cdot x} \mathrm{d}\xi$$

2 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Définition.

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \,|\, \nabla u \in \left(L^2(\Omega)\right)^d \right\}$$

$$\forall u, v \in H^1(\Omega), (u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

Théorème. $H^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

Proposition. *Soit* $u \in H^1(\Omega)$.

$$||u||_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leq ||u||_{H^1(\Omega)} \qquad ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} \leq ||u||_{H^1(\Omega)}$$

Définition.

$$H^1_0(\Omega) = \overline{\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)}^{||\cdot||_{H^1(\Omega)}}$$

Théorème.

$$H^1_0\left(\mathbb{R}^d\right) = H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$$

La preuve se fait par troncature et régularisation. Plus précisément, considérons une fonction $u \in H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. On définit $\chi \in \mathcal{C}^\infty_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ une fonction test constante égale à 1 dans un voisinage de 0 et tendant lentement vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$. On pose alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^d, u_n(x) = u(x)\chi\left(\frac{x}{n}\right).$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ et à support compact. De plus, $u_n \to u$ dans $H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ une fonction test telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \phi = 1$. On définit

$$\forall n, j \in \mathbb{N}, u_{n,j} = u_n * \left(j^d \phi(j\cdot)\right)$$

une convoluée de u_n avec ϕ. Alors la transformée de Fourier de $u_{n,j}$ vaut

$$\hat{u}_{n,j}(\xi) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{u}_n(\xi) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{j}\right).$$

On montre ensuite que

$$||u_{n,j} - u_n||_{H^1(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + |\xi|^2\right) |\hat{u}_n(\xi)|^2 \left|1 - (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{j}\right)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui permet de conclure.

3 Ouverts de classe $\mathcal{C}^k$, lipschitziens, uniformément lipschitziens

Un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ est respectivement de classe $\mathcal{C}^k$, lipschitzien ou uniformément lipschitzien si $\forall x \in \Omega$, il existe un voisinage V_x de x et respectivement un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme, un homéomorphisme lipschitzien d'inverse lipschitzien ou un homéomorphisme uniformément lipschitzien d'inverse uniformément lipschitzien, ϕ_x de $]-1,1[^d$ dans V_x, tels que

$$\begin{cases} \phi_x(0) = x \\ \phi_x\left(]-1,1[^{d-1} \times \{0\}\right) = V_x \cap \partial\Omega \\ \phi_x\left(]-1,1[^{d-1} \times]-1,0[\right) = V_x \cap \Omega \end{cases}$$

Si Ω est lipschitzien, il existe $\mathrm{d}\sigma$ une mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$ et $n(x)$ un vecteur normal sortant défini σ-presque partout sur $\partial\Omega$ tels que

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^1_c\left(\bar{\Omega}\right), \int_\Omega \mathrm{div}(\phi) = \int_{\partial\Omega} \phi \cdot n \mathrm{d}\sigma.$$

Théorème (de trace)**.** *Soit Ω un ouvert uniformément lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. Alors l'application linéaire*

$$\begin{array}{rcl} H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}_c^0\left(\bar{\Omega}\right) & \to & L^2(\partial\Omega) \\ u & \mapsto & u|_{\partial\Omega} \end{array}$$

admet un unique prolongement par continuité

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega) .$$

L'application trace γ_0 est continue et on a

$$\mathrm{Ker}(\gamma_0) = H_0^1(\Omega) \qquad \mathrm{Im}(\gamma_0) := H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

Enfin, on a la formule d'intégration par parties :

$$\forall u, v \in H^1(\Omega), \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v = \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\, \gamma_0(v)\, (n \cdot e_j)\, \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

Les ouverts présentant des points de rebroussement ou des fissures ne sont pas lipschitziens.