Résumé du cours d'analyse fonctionnelle : séance 1

Clément Mazzocchi
d'après le cours donné par Éric Cances
École nationale des ponts et chaussées | Institut Polytechnique de Paris

2024-2025

Convergence faible dans les espaces de Hilbert

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$, $u \in \mathcal{H}$.

Définition (Convergence forte, convergence faible)**.**
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers u dans $\mathcal{H}$ si $||u_n - u||_{\mathcal{H}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On note alors $u_n \to u$ dans $\mathcal{H}$.*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u dans $\mathcal{H}$ si $\forall v \in \mathcal{H}, (v, u_n)_{\mathcal{H}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (v, u)_{\mathcal{H}}$. On note alors $u_n \rightharpoonup u$ dans $\mathcal{H}$.*

Proposition.
- *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $\mathcal{H}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*
- *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers u dans $\mathcal{H}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u dans $\mathcal{H}$.*
- *Si $\dim \mathcal{H} < +\infty$, alors la convergence forte équivaut à la convergence faible.*
- *Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale dans $\mathcal{H}$, alors $e_n \rightharpoonup 0_{\mathcal{H}}$ (mais $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas fortement dans $\mathcal{H}$).*

Théorème (Compacité faible des suites bornées)**.** *De toute suite bornée d'éléments de $\mathcal{H}$, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.*

Définition. *Soit K un sous-ensemble de $\mathcal{H}$.*
- *K est fermé pour la topologie forte, ou fortement fermé, si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to u$ dans $\mathcal{H}$, alors $u \in K$.*
- *K est fermé pour la topologie faible, ou faiblement fermé, si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans $\mathcal{H}$, alors $u \in K$.*

Théorème (de Mazur)**.** *Soit K un sous-ensemble de $\mathcal{H}$ convexe et fortement fermé. Alors K est faiblement fermé.*

Définition. *Soit $J : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$.*
- *J est semi-continue inférieurement pour la topologie forte si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to u$ dans $\mathcal{H}$, alors $J(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(u_n)$.*
- *J est semi-continue inférieurement pour la topologie faible si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans $\mathcal{H}$, alors $J(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(u_n)$.*

Théorème. *Soit $J : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie forte. Alors J est semi-continue inférieurement pour la topologie faible.*

Pour démontrer ce théorème, on se sert de l'épigraphe de $J : K = \{(u, \lambda) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}, J(u) \leq \lambda\{$. Comme J est convexe, on sait que K est un sous-ensemble convexe de $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$. On montre ensuite que si J est semi-continue inférieurement pour la topologie forte, alors K est fortement fermé dans $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$. Puis on utilise le théorème de Mazur : K est donc faiblement fermé dans $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$. Enfin, on montre que si K est faiblement fermé dans $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$, alors J est semi-continue inférieurement pour la topologie faible, ce qui conclut la preuve.

Théorème. *Soit K un sous-ensemble de $\mathcal{H}$ convexe, fermé et non-vide. Soit $J : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ convexe, semi-continue inférieurement pour la topologie forte et telle que $J(v) \underset{||v||_{\mathcal{H}} \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors le problème $\inf\limits_{v \in K} J(v)$ admet un minimiseur (global). De plus, tout minimiseur local est global et l'ensemble des minimiseurs de J sur K est un sous-ensemble convexe, fermé et non-vide de K.*

Remarque. La fonction $J : l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, u \mapsto J(u) = \left(||u||_{l^2}^2 - 1\right)^2 + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n^2}{n+1}$ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ et tend vers $+\infty$ lorsque $||u||_{l^2} \to +\infty$, mais n'a pas de minimiseur sur $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.