Résumé du cours de mécanique quantique : séance 5

Clément Mazzocchi
d'après le cours donné par Éric Cances
École des Ponts ParisTech

2023-2024

Table des matières

Dans ce cinquième résumé, on entreprend l'étude des systèmes à deux états dans l'espace $\mathbb{C}^2$, avant d'aborder l'étude des systèmes multi-états grâce au formalisme tensoriel.

1 Systèmes à deux états

Ici, l'espace d'états est $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, muni de la base

$$\begin{cases} |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle = |0\rangle \\ |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle = |1\rangle \end{cases}$$

1.1 Ensemble des états purs

L'ensemble des états purs de $\mathcal{H}$ est $P\mathbb{C}^2$, l'espace projectif de $\mathbb{C}^2$, défini par

$$P\mathbb{C}^2 = {\mathbb{C}^2}^* / \sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par $|\psi\rangle \sim |\phi\rangle \iff \exists\theta \in \mathbb{R} |\, |\phi\rangle = e^{i\theta} |\psi\rangle$.

$P\mathbb{C}^2$ est isomorphe à $\mathbb{S}^2$ la sphère de rayon 1 de $\mathbb{R}^3$ par l'isomorphisme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & P\mathbb{C}^2 \\ \mathbf{n} & \longmapsto & \mathbb{C}^*\psi_{\mathbf{n}} \end{array}$$

avec $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}$ et $\psi_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$.

1.2 Observables

On peut montrer que tout observable $\hat{A}$ peut s'écrire

$$\hat{A} = aI_2 + b\hat{A_{\mathbf{p}}}, (a,b) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{p} \in \mathbb{S}^2$$

où $\hat{A_{\mathbf{p}}} = \mathbf{p} \cdot \sigma$ est l'observable associée à $A_{\mathbf{p}}$ la polarisation selon l'axe $\mathbf{p}$.

Plus précisément, on a

$$\hat{A_{\mathbf{p}}} = \mathbf{p} \cdot \sigma = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}$$

Le spectre de $\hat{A_{\mathbf{p}}}$ est $\sigma\left(\hat{A_{\mathbf{p}}}\right) = \{-1; 1\}$. $\hat{A_{\mathbf{p}}}$ vérifie les relations

$$\hat{A_{\mathbf{p}}}\psi_{\mathbf{p}} = \psi_{\mathbf{p}}, \qquad \hat{A_{-\mathbf{p}}}\psi_{\mathbf{p}} = -\psi_{\mathbf{p}}$$

En considérant un état $\psi \in \mathbb{C}^2$ vérifiant $||\psi|| = 1$, on a donc

$$\mathbb{P}_{\psi, A_{\mathbf{p}}}(\{1\}) = ||\chi_{\{1\}}\left(\hat{A_{\mathbf{p}}}\right)\psi||^2 = ||\,|\psi_{\mathbf{p}}\rangle\langle\psi_{\mathbf{p}}|\,|\psi\rangle\,||^2 = |\langle\psi_{\mathbf{p}}|\psi\rangle|^2$$

2 Formalisme tensoriel

On considère désormais deux espaces de Hilbert complexes séparables $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ de bases hilbertiennes respectives $(\phi_{1,m})_{m\in\mathbb{N}}$ et $(\phi_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$, et on se place dans l'espace produit tensoriel $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ muni de la base hilbertienne

$$(\phi_{1,m} \otimes \phi_{2,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$$

Exemple 1.

$$\underbrace{\mathbb{C}^r}_{\text{vecteurs de la forme } \sum_{j=1}^r \psi_j \mathbf{e_j}} \otimes \mathbb{C}^s \cong \underbrace{\mathbb{C}^{rs}}_{\text{matrices de la forme } \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s M_{j,k}\mathbf{e_j}\otimes\mathbf{e_k}}$$

Exemple 2.

$$\underbrace{L^2(\Omega_1)}_{\ni f(x_1)} \otimes \underbrace{L^2(\Omega_2)}_{\ni g(x_2)} \cong \underbrace{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)}_{\ni h(x_1,x_2)}$$

2.1 États factorisés

Un état est dit factorisé s'il se met sous la forme

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \equiv |\psi_1 \otimes \psi_2\rangle = |\psi_1, \psi_2\rangle = |\psi_1\psi_2\rangle$$

Exemple 3. *Avec $\mathcal{H}_1 = L^2(\Omega_1)$, $\mathcal{H}_2 = L^2(\Omega_2)$, $\psi_1 \in \mathcal{H}_1$ et $\psi_2 \in \mathcal{H}_2$, un état factorisé vérifie*

$$(\psi_1 \otimes \psi_2)(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\,\psi_2(x_2)$$

Exemple 4. *Avec $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^r$, $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^s$, $\mathbf{u_1} \in \mathcal{H}_1$ et $\mathbf{u_2} \in \mathcal{H}_2$, un état factorisé vérifie*

$$\mathbf{u_1} \otimes \mathbf{u_2} \equiv u_1 u_2^T$$

Ainsi, en notant $\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{1r} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} u_{21} \\ \vdots \\ u_{2s} \end{pmatrix}$, on a $\left(u_1 u_2^T\right)_{ij} = u_{1i}u_{2j}$. En effet, si $\mathbf{u_1} = \sum_{i=1}^r u_{1i}\mathbf{e_i}$ et $\mathbf{u_2} = \sum_{j=1}^s u_{2j}\mathbf{f_j}$, alors

$$\mathbf{u_1} \otimes \mathbf{u_2} = \left(\sum_{i=1}^r u_{1i}\mathbf{e_i}\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^s u_{2j}\mathbf{f_j}\right) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s u_{1i}u_{2j}\mathbf{e_i} \otimes \mathbf{f_j}$$

2.2 Opérations élémentaires

Pour tous états $\psi_1 \in \mathcal{H}_1$ et $\psi_2 \in \mathcal{H}_2$, on a

$$\begin{aligned}
|\alpha\psi_1, \psi_2\rangle &= \alpha\,|\psi_1, \psi_2\rangle = |\psi_1, \alpha\psi_2\rangle \\
|\phi_1 + \psi_1, \chi_2\rangle &= |\phi_1, \chi_2\rangle + |\psi_1, \chi_2\rangle \\
|\phi_1, \chi_2 + \xi_2\rangle &= |\phi_1, \chi_2\rangle + |\phi_1, \xi_2\rangle
\end{aligned}$$

2.3 Produit scalaire

Pour tous états $\phi_1, \psi_1 \in \mathcal{H}_1$ et $\phi_2, \psi_2 \in \mathcal{H}_2$, on a

$$\langle \phi_1 \otimes \phi_2 | \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2} = \langle \phi_1 | \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \phi_2 | \psi_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}$$

Exemple 5. *Avec* $\mathcal{H}_1 = L^2(\Omega_1)$, $\mathcal{H}_2 = L^2(\Omega_2)$, *on a*

$$\langle \phi_1 \otimes \phi_2 | \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2} = \left(\int_{\Omega_1} \overline{\phi_1} \psi_1 \right) \left(\int_{\Omega_2} \overline{\phi_2} \psi_2 \right) \underset{Fubini}{=} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \left(\overline{\phi_1 \otimes \phi_2} \right) (\psi_1 \otimes \psi_2)$$