

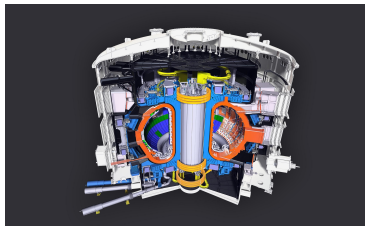
# TIPE (thème : la ville)

Trajectoires et confinement de particules chargées dans le tokamak  
d'un réacteur de fusion thermonucléaire

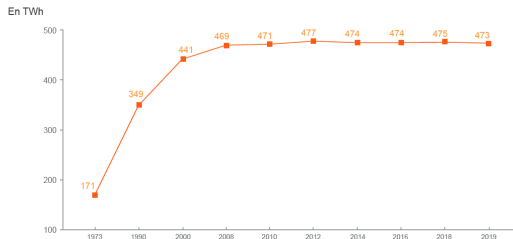
Clément Mazzocchi - N°12063

MP\* Info

2022-2023



Secteur résidentiel = 36% de la consommation d'électricité en France  
Villes = 82% de la population



Évolution de la consommation électrique en France entre 1973 et 2019  
(en mode corrigé des aléas climatiques et des effets calendaires)

Source RTE - Bilan électrique 2019

© EDF

## Problématique retenue

Comment les particules chargées du plasma sont-elles confinées dans le tokamak d'un réacteur de fusion thermonucléaire ?

# Solution : la fusion nucléaire

## Réaction de fusion nucléaire

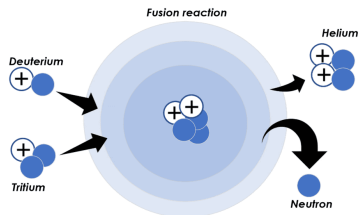
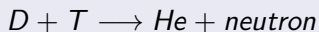


Figure: (iaea.org)

## Avantages

- Disponibilité des combustibles
- Impact environnemental faible
- Sécurité

## Contraintes

- Formation et chauffage du plasma
- Confinement

## Le projet ITER

Collaboration internationale  
Cadarache (Bouches-du-Rhône)

## Critère de Lawson

$$n_e T_E T \geq 3 \cdot 10^{20} m^{-3} \cdot keV \cdot s \quad (\approx 75 \cdot 10^{20} m^{-3} \cdot keV \cdot s \text{ pour ITER})$$

Méthodes de confinement :

- **Confinement magnétique :**
  - Tokamak
  - Stellarator
- Confinement inertiel

## Facteur d'amplification et rentabilité commerciale

$$Q = \frac{\text{puissance produite}}{\text{puissance reçue}}$$

Record actuel :  $Q = 0.65$

Objectif commercial :  $Q = 10$   
(ITER) voire  $Q = 20$

Étude d'une trajectoire électronique sous l'influence d'un champ magnétique.

Complexification progressive du système magnétique envisagé jusqu'à aboutir à un confinement total.

## Sommaire

- Méthode
- Mouvement fondamental
- Configuration tokamak
- Amélioration du modèle

## Principe fondamental de la dynamique

$$m\dot{\vec{v}} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \implies \dot{\vec{v}} = -\epsilon\vec{\omega}_c \wedge \vec{v}$$

avec  $\vec{\omega}_c = \frac{|q|\vec{B}}{m}$  et  $\epsilon = \text{signe}(q)$

(présence d'un éventuel champ  $\vec{E}$  négligée)

## Résolution numérique

- Recherche de l'équation du mouvement
- Adimensionnement des équations avec des grandeurs caractéristiques
- Utilisation de la méthode de Runge-Kutta
- Tracé sous Python

# Mouvement fondamental

## Champ magnétique uniforme unidimensionnel

$$\vec{B} = B_0 \vec{u}_z, \omega_c = \frac{|q|B_0}{m}, \epsilon = \text{signe}(q)$$

## Principe fondamental de la dynamique

$$\dot{\vec{v}} = \epsilon \omega_c \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{x} = \epsilon \omega_c \dot{y}$$

$$\ddot{y} = -\epsilon \omega_c \dot{x}$$

$$\ddot{z} = 0$$

Adimensionnement :

- Grandeurs caractéristiques :

$L$  une longueur

$$\left[ \frac{1}{\omega_c} \right] = T$$

- Nouvelles grandeurs :

$$x(t) = LX(\omega_c t)$$

$$y(t) = LY(\omega_c t)$$

$$z(t) = LZ(\omega_c t)$$

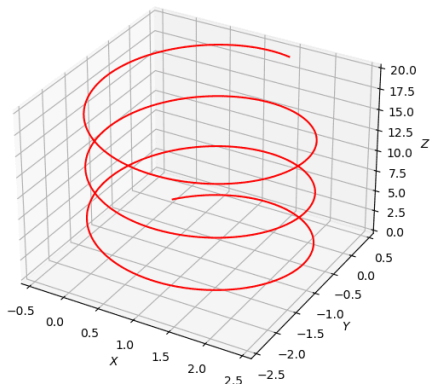
- PFD adimensionné :

$$X'' = \epsilon Y'$$

$$Y'' = -\epsilon X'$$

$$Z'' = 0$$

# Mouvement fondamental



## Conditions initiales

$$X(0) = Y(0) = Z(0) = 0$$

$$X'(0) = Y'(0) = Z'(0) = 1$$

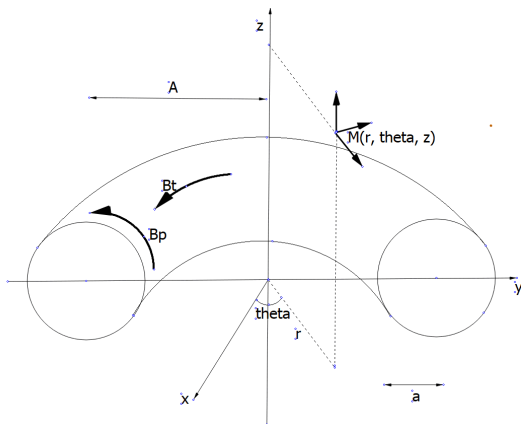
Soit pour les grandeurs non adimensionnées :

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = L\omega_c$$

Mouvement cyclotronique à la pulsation  $\omega_c$

# Configuration du tokamak



- Grand rayon :  $A$
- Petit rayon :  $a$
- Coordonnées cylindriques :  $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$
- Composantes toroïdale et poloïdale :  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\phi$

# Configuration du tokamak

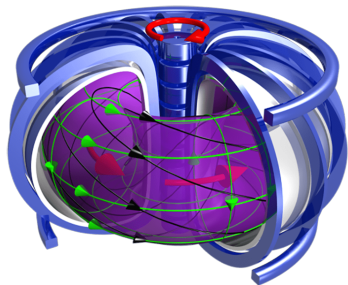


Figure: Tokamak (iaea.org)

- Bleu : bobines magnétiques / solénoïde
- Vert : champs toroïdal / poloïdal
- Rouge : courants
- Noir : trajectoires électroniques

Données (*ITER Physics Basis*) :

$A$	8,14 m
$a$	2,80 m
$I_p$	21 MA
$B_t$	5,68 T

Adimensionnement :

- $r(t) = AR(\omega_c t)$
- $\theta(t) = \Theta(\omega_c t)$
- $z(t) = aZ(\omega_c t)$

# Bobinage toroidal

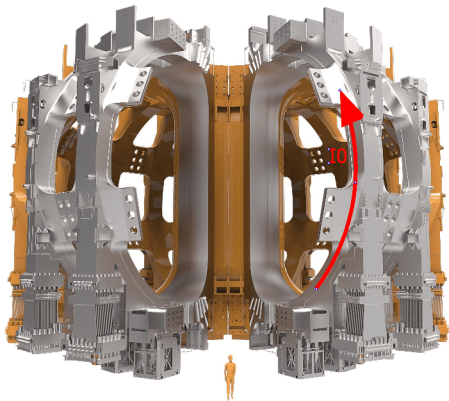


Figure: Bobines toroïdales (iter.org)

Approximation réalisée :  
hypothèse des spires jointives (qui peut être améliorée à l'aide de la loi de Biot-et-Savart)  
On applique le théorème d'Ampère avec  $N$  le nombre de spires et  $I_0$  l'intensité du courant.

## Champ toroïdal

$$\vec{B}_t = \frac{\mu_0 N I_0}{2\pi r} \vec{u}_\theta = \frac{B_0}{R} \vec{u}_\theta$$

$$\text{avec } B_0 = \frac{\mu_0 N I_0}{2\pi A} \text{ et } R = \frac{r}{A}$$

## Champ toroïdal

$$\vec{B}_t = \frac{B_0}{R} \vec{u}_\theta, \quad \alpha = \frac{a}{A}$$

## PFD et adimensionnement

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \epsilon\omega_c A \frac{\dot{z}}{r}$$

$$\ddot{\theta} = -2\frac{\dot{r}\dot{\theta}}{r}$$

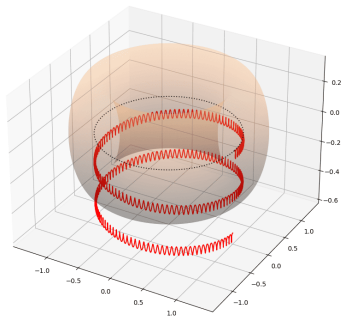
$$\ddot{z} = \epsilon\omega_c A \frac{\dot{r}}{r}$$

$$R'' = R\Theta'^2 - \epsilon\alpha \frac{Z'}{R}$$

$$\Theta'' = -2\frac{R'\Theta'}{R}$$

$$Z'' = \frac{\epsilon R'}{\alpha R}$$

# Confinement horizontal

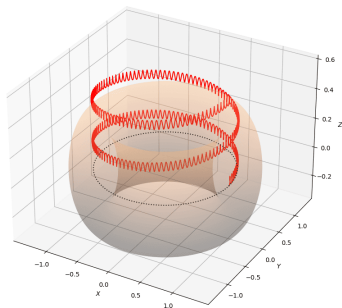


## Conditions initiales

$$R(0) = 1$$

$$R'(0) = \Theta'(0) = 10^{-2}$$

$$\epsilon = -1$$



## Conditions initiales

$$R(0) = 1$$

$$R'(0) = \Theta'(0) = 10^{-2}$$

$$\epsilon = +1$$

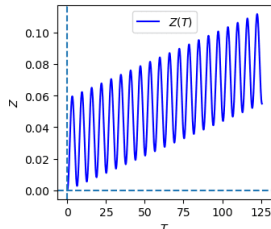
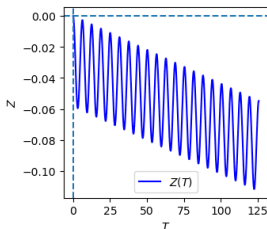
Apparition d'une dérive verticale

## Expression générale

$$\vec{v}_d = \frac{m}{qA} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{B}_t}{B_t^2}$$

Ici :

$$\vec{v}_d = \frac{r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 + \dot{z}^2}{\epsilon A \omega_c} \vec{u}_z = \epsilon A \omega_c (R^2 \Theta'^2 + R'^2 + Z'^2) \vec{u}_z$$



Le sens de la dérive dépend de la charge de la particule.

# Champ poloïdal induit

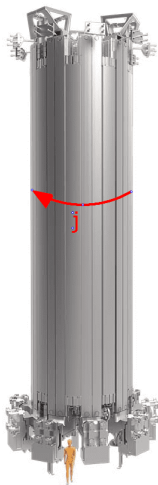


Figure: Solénoïde central (iter.org)

- 1 Application d'un courant variable dans le temps au solénoïde central
- 2 Champ magnétique vertical  $\vec{B}_z = B_2 \vec{u}_z$
- 3 Apparition d'un champ électrique toroïdal proportionnel à  $\dot{B}_z$ , par la loi de Faraday
- 4 Création d'un courant induit dans le plasma
- 5 Apparition d'un nouveau champ magnétique poloïdal  $\vec{B}_p = B_1 \frac{\rho}{a} \vec{u}_\alpha$  (théorème d'Ampère)

## Champ poloïdal

$$\vec{B}_p = \beta B_0 \frac{\rho}{a} \vec{u}_\alpha = \frac{\beta B_0}{a} (z \vec{u}_r + (A - r) \vec{u}_z)$$

avec  $\beta = \frac{B_1}{B_0}$  et  $\rho = \sqrt{(r - A)^2 + z^2}$

# Confinement vertical

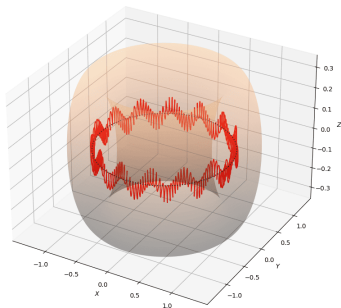
Champ total ( $\vec{B}_t + \vec{B}_p$ )

$$\vec{B}_{\text{tot}} = B_0 \left( \frac{A}{r} \vec{u}_\theta + \frac{\beta}{a} (z \vec{u}_r + (A - r) \vec{u}_z) \right)$$

PFD et adimensionnement

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - \epsilon\omega_c A \frac{\dot{z}}{r} + \epsilon\beta\omega_c r\dot{\theta} \frac{A-r}{a} & R'' &= R\Theta'^2 - \epsilon\alpha \frac{Z'}{R} + \epsilon \frac{\beta}{\alpha} R\Theta'(1-R) \\ \ddot{\theta} &= -2\frac{\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \epsilon\beta\omega_c \frac{zz - \dot{r}(A-r)}{ar} & \Theta'' &= -2\frac{R'\Theta'}{R} + \epsilon\beta \frac{\alpha^2 ZZ' - R'(1-R)}{\alpha R} \\ \ddot{z} &= \epsilon\omega_c A \frac{\dot{r}}{r} - \epsilon\beta \frac{\omega_c r\dot{\theta}z}{A} & Z'' &= \frac{\epsilon R'}{\alpha R} - \epsilon \frac{\beta}{\alpha} R\Theta'Z \end{aligned}$$

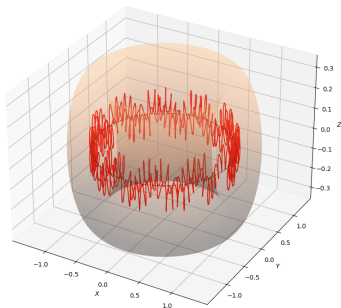
# Confinement vertical



## Conditions initiales

$$R(0) = 1$$

$$R'(0) = \Theta'(0) = 10^{-2}$$



## Conditions initiales

$$R(0) = 1$$

$$R'(0) = 10^{-2}$$

$$\Theta'(0) = 2 \times 10^{-2}$$

Confinement total dans le tore pour des conditions initiales raisonnables.

# Limitations : bobines additionnelles

Servent à l'équilibrage du plasma : gestion des turbulences

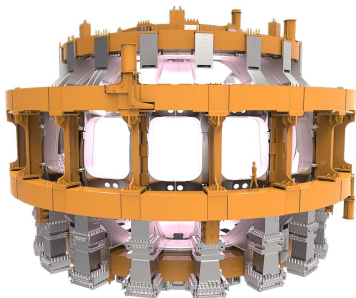


Figure: Bobines poloidales (iter.org)

Application d'un champ magnétique vertical qui stabilise le plasma

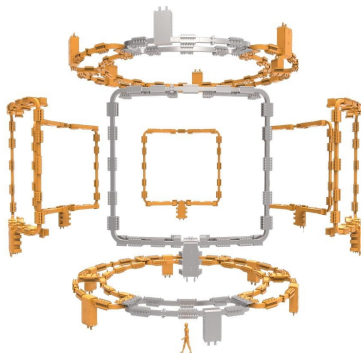


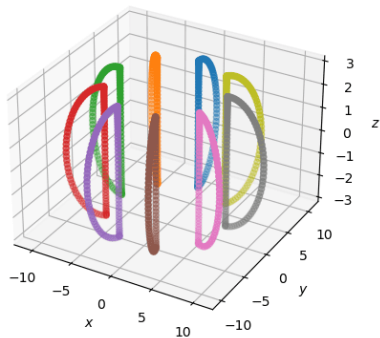
Figure: Bobines additionnelles (iter.org)

Champs de précision

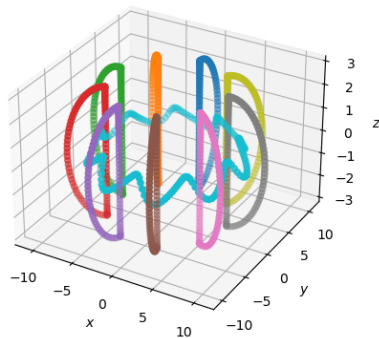
# Amélioration du modèle : la loi de Biot et Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{\ell} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

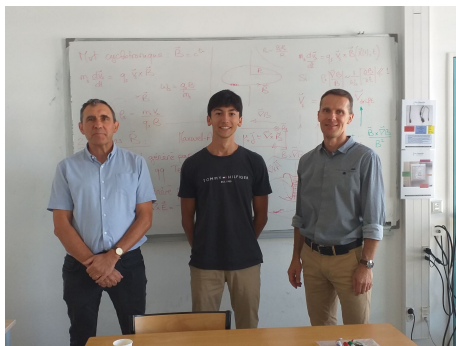
## Modélisation des spires



## Champ toroidal résultant



Merci pour votre attention.



*Au CEA, avec Xavier Garbet (médaillé d'argent CNRS) et Yanick Sarazin, directeurs de recherche en physique des plasmas (juillet 2022).*

# Annexe 1 : résolution numérique

```
#Équation adimensionnée
def rhs_1(x,t):
    return [x[1],-x[3],x[3],x[1],x[5],0]
TMAX=20 #Durée d'intégration
N=1000 #Nombre de points à tracer
CI=[0,1,0,1,0,1] #Conditions initiales
t=np.linspace(0,TMAX,N) #Intervalle de temps d'intégration
traj=odeint(rhs_1,CI,t)

def tokamak(precision, c, a):
    U = np.linspace(0, 2*np.pi, precision)
    V = np.linspace(0, 2*np.pi, precision)
    U, V = np.meshgrid(U, V)
    X = (c+a*np.cos(V))*np.cos(U)
    Y = (c+a*np.cos(V))*np.sin(U)
    Z = a*np.sin(V)
    return X, Y, Z
```

## Annexe 2 : tracé du jeu de spires

*#Rayon "a", distance "A" de l'axe vertical, précision de "n" points*

```
def spire_helice(A,a,n):  
    theta=[i*2*np.pi/n for i in range(n)]  
    x=0  
    y=A-a/2+(3*a/2)*np.sin(theta)  
    z=a*np.cos(theta)  
    spire=np.zeros((n,3))  
    spire[:,0]=x;spire[:,1]=y;spire[:,2]=z  
    spire[n//2:,1]=A-a/2  
    return spire
```

*#Rotation d'une spire d'un angle "theta" autour de l'axe vertical*

```
def rotation(spire,theta):  
    n=len(spire)  
    x=np.cos(theta)*spire[:,0]-np.sin(theta)*spire[:,1]  
    y=np.sin(theta)*spire[:,0]+np.cos(theta)*spire[:,1]  
    z=spire[:,2]  
    spire_=np.zeros((n,3))  
    spire_[:,0]=x;spire_[:,1]=y;spire_[:,2]=z  
    return spire_
```

## Annexe 3 : calcul du champ toroïdal

On se place en coordonnées polaires. On calcule le champ toroïdal au voisinage de  $z = 0$ .

On fait l'approximation des spires jointives. Dans ce modèle, par symétries et invariances de la distribution de courants, on a :

$$\vec{B}_t = B_t(r)\vec{u}_\theta$$

On applique le théorème d'Ampère sur un contour circulaire  $\Gamma$  de centre  $O$  et de rayon  $r$  :

$$\oint_{\Gamma} B_t(r)dr = \mu_0 N I_0$$

avec  $N$  le nombre de spires et  $I$  l'intensité du courant qui y circule.

D'où :

$$\vec{B}_t = \frac{\mu_0 N I_0}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

## Annexe 4 : PFD en coordonnées cylindriques

On prend l'exemple du calcul du champ total, ce champ étant le plus complexe parmi ceux étudiés.

$$\vec{B}_{tot} = B_0 \left( \frac{A}{r} \vec{u}_\theta + \frac{\beta}{a} (z \vec{u}_r + (A - r) \vec{u}_z) \right)$$

On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \epsilon \frac{|q| B_0}{m} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \beta \frac{z}{a} \\ \frac{A}{a} \\ \beta \frac{A-r}{a} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne finalement le système :

$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \epsilon \omega_c A \frac{\dot{z}}{r} + \epsilon \beta \omega_c r \dot{\theta} \frac{A-r}{a} \\ \ddot{\theta} = -2 \frac{\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \epsilon \beta \omega_c \frac{z\dot{z} - \dot{r}(A-r)}{ar} \\ \ddot{z} = \epsilon \omega_c A \frac{\dot{r}}{r} - \epsilon \beta \frac{\omega_c r \dot{\theta} z}{A} \end{cases}$$